

Ponovno: enačbo

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

s substitucijo $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $u(x, y) = v(\xi, \eta)$
prevedemo na enačbo

$$\tilde{a}v_{\xi\xi} + 2\tilde{b}v_{\xi\eta} + \tilde{c}v_{\eta\eta} = \tilde{f}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

V hiperbolichnem primeru lahko substitucijo
izberemo tako, da je $\tilde{a} = 0$ in $\tilde{c} = 0$

velja namreč

$$\tilde{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\eta_x + c\eta_x^2$$

$$\tilde{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\xi_x + c\xi_x^2$$

če rešimo kvadratno enačbo

$$a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$$

$$\text{dobimo } \mu_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

V hiperbolichnem primeru ima ta enačba
dve različni realni rešitvi

Novi spremenljivki ξ in η dobimo
tako, da rešimo dve PDE 1. reda

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \mu_1 \quad \text{in} \quad \frac{\eta_x}{\eta_y} = \mu_2$$

Po substituciji dobimo kanonično obliko

$$v_{\xi\eta} = \frac{1}{2\tilde{b}} \tilde{f}$$

V eliptičnem primenu, ima kvadratna enačba $a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$ dve konjugirano kompleksni rešitvi μ_1, μ_2 .

Začetno podobno kot v hiperboličnem primenu, ampak dobimo kompleksni ξ in η zato uvedemo drugacno substitucijo
 z novima spremenljivkama $x = \operatorname{Re} \xi$ in $y = \operatorname{Im} \xi$
 Potem dobimo kanonično obliko

$$V_{xx} + V_{yy} = \tilde{g}$$

V parabolicičnem primenu pa ima kvadratna enačba $a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$ dvojno realno mebo
 in sicer $\mu = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \stackrel{mc}{=} \frac{-b}{a}$

Novo spremenljivko ξ določimo kot v hiperboličnem primenu, se pravi da

rešimo PDE 1. reda $\frac{\xi_x}{\xi_y} = \mu$

Novo spremenljivke η pa ne moremo določiti na tak način (ker imamo samo en μ)

Za η vzamemo poljubno funkcijo x in y ,
 ki ~~ni~~ funkcija od $\xi(x, y)$

Po izbiri ξ je potem $\tilde{a} = 0$

Ker je enačba parabolichna, velja
 $\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2 = 0$ (sledi iz $ac - b^2 = 0$)

Ker je $\tilde{a} = 0$, odtod sledi $\tilde{b}^2 = 0$, torej je $\tilde{b} = 0$.

Po substituciji torej dobimo kanonično
obliko $V\eta\eta = \frac{1}{c} \tau$

Primer: Pretvori naslednjo PDE v
kanonično obliko:

$$\underbrace{x^2}_{a} u_{xx} + \underbrace{2xy}_{b} u_{xy} + \underbrace{y^2}_{c} u_{yy} = 0$$

Ker je $ac = b^2$, je enačba parabolichna

Torej lahko poiščemo ξ , drugo spr. η
pa "pogubno" izberemo

Najprej rešimo kvadratno enačbo

$$a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$$

$$x^2\mu^2 + 2xy\mu + y^2 = 0$$

$$(x\mu + y)^2 = 0$$

$$x\mu + y = 0$$

$$\mu = -\frac{y}{x}$$

Novo spremenljivko z določimo tako,
da rešimo PDE 1. reda

$$\frac{g_x}{g_y} = \mu = \frac{-y}{x}$$

Odpravimo ulomke in dobimo

$$x g_x + y g_y = 0$$

Ravno samo eno rešitev te enačbe,
ker potrebujemo samo en prvi integral
pripadajočega kar. sistema

$$x' = x$$

$$y' = y$$

Če ti dve enačbi delimo, dobimo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}$$

kočo spremenljivke

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

integriramo

$$\ln x = \ln y + \ln C$$

• Odtod sledi:

$$x = Cy$$

$$\frac{x}{y} = C$$

za prvi integral potem vzamemo $\frac{x}{y}$.

Novo spremenljivka ξ je torej:

$$\xi(x, y) = \frac{x}{y}$$

Spremenljivke y ne moremo poiskati na tak način, ker ima kvadr. enačba za μ eno samo rešitev.

Za y vzamemo poljubno funkcijo x in y , ki ni funkcija od $\xi(x, y)$.

Vzemo tudi $\eta = y$

Sedaj v enačbi $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ napravimo substitucijo

$$\xi = \frac{x}{y} \quad \text{in} \quad \eta = y$$

• $\tilde{g}$ smo izbrali tako, da je $\tilde{a} = 0$.

Ker je enačba parabolika, ~~odt~~ sledi,
da je tudi $\tilde{b} = 0$ ($\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2 = 0$)

Za $\tilde{c}$ imamo formulo

$$\tilde{c} = a y_x^2 + 2b y_x y_y + c y_y^2$$

$$y = y \Rightarrow y_x = 0, y_y = 1$$

$$\text{Torej je } \tilde{c} = 0 + 0 + y^2 \cdot 1^2 = y^2 = y^2$$

Za $\tilde{f}$ imamo formulo

$$\tilde{f} = f - \tilde{d} v_g - \tilde{e} v_h, \text{ kjer je}$$

$$\tilde{d} = a g_{xx} + 2b g_{xy} + c g_{yy}$$

$$\tilde{e} = a y_{xx} + 2b y_{xy} + c y_{yy}$$

$$g = \frac{x}{y}$$

$$y = y$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned} \tilde{d} &= x^2 \cdot 0 + 2xy \cdot \frac{-1}{y^2} + y^2 \cdot \frac{2x}{y^3} \\ &= 0 + \frac{-2x}{y} + \frac{2x}{y} = 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{e} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\text{Torej je } \tilde{f} = 0$$

- Dobili smo enačbo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & v_{yy} & = \tilde{f} \\ \parallel & & \parallel \\ y^2 & & 0 \end{array}$$

Odtod sledi, da je $v_{yy} = 0$

$$y = \frac{x}{y}$$

Odtod sledi $v_y = f(y)$

$$y = y$$

Torej je $v = f(y)y + g(y)$

Torej je $v(y, y) = f(y)y + g(y)$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ u(x, y) & f(\frac{x}{y}) \cdot y + g(\frac{x}{y}) \end{array}$$

Splacena rešitev je

$$u(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot y + g\left(\frac{x}{y}\right),$$

kjer sta f in g poljubni funkciji.

VALOVNA, TOPLITNA IN LAPLACEOVA ENAČBA

•) Uvod v valovno enačbo

Valovna enačba se glasi

$$c^2 \Delta u = u_{tt},$$

kjer je c konstanta in u funkcija ene ali več prostorskih spremenljivk in časa t .

V 1D se glasi $c^2 u_{xx} = u_{tt}$

V 2D se glasi $c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}$

V 3D -||- $c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}$

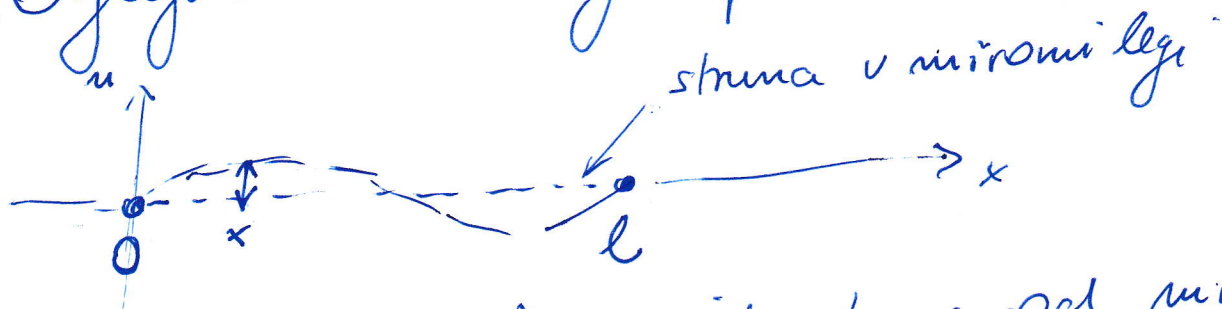
1D primer ustreza recimo nihanju strune,

2D primer ustreza nihanju (recimo krožna ali pravokotna) opne

3D primer bi recimo ustrezal nihanju zraka v akustiki

Nadrt je, da dobro obdelamo nihanje strune. Če bo čas tudi nihanje pravokotne opre. Pri nihanju krožne opre nastopajo nove funkcije (Besslove funkcije) - ne bomo.

Oglejmo si nihanje vpete strune



Naj bo $u(x,t)$ odmik strune od mirovne lege na kraju x in v času t .

Izkaže se, da odmik zadošča PDE

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$

kjer je $c^2 = \frac{T}{\rho}$ hitrost valovanja

T = napetost strune

ρ = linearna gostota strune

V splošni rešitvi enačbe nastopajo še neznane funkcije.

Če se hočemo znebiti nemanih funkcij,
potrebujemo še dodatne pogoje
Imamo dva začetna in dva robna pogoja.

Začetna pogoja nam povesta začetno
obliko in začetno hitrost strune

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

Robna pogoja nam povesta, da je
struna upeta v levem in v
desnem krajšču

$$u(0, t) = 0$$

$$u(l, t) = 0$$

Enačbo nihanja strune bomo rešili
na dva načina.

- z d'Alembertovo metodo
- s Fourierovo metodo

•) D'Alembertova metoda za struno

Najprej poiščemo splošno rešitev enačbe

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$

To je poseben primer hiperbolične PDE 2. reda

$$c^2 u_{xx} + 2 \cdot 0 \cdot u_{xt} + (-1) u_{tt} = 0$$

$$\text{Ker je } c^2 \cdot (-1) - 0^2 = -c^2 < 0,$$

je enačba hiperbolična

Najprej rešimo kvadratno enačbo

$$c^2 \mu^2 + 2 \cdot 0 \cdot \mu + (-1) = 0$$

$$\mu^2 = \frac{1}{c^2}$$

$$\mu = \pm \frac{1}{c}$$

Prilpadajoči PDE 1. reda sta

$$\frac{f_x}{f_t} = \mu_1 = \frac{1}{c} \quad \text{in} \quad \frac{g_x}{g_t} = \mu_2 = -\frac{1}{c}$$

$$c f_x - f_t = 0$$

$$c g_x + g_t = 0$$

$$c f_x - f_t = 0$$

$$x' = c$$

$$t' = -1$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x'}{t'} = -c$$

$$dx = -c dt$$

$$x = -ct + \text{konst}$$

$$\underbrace{x+ct}_{\eta} = \text{konst}$$

$$c \eta_x + \eta_t = 0$$

$$x' = c$$

$$t' = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = c$$

$$dx = c dt$$

$$x = ct + \text{konst}$$

$$\underbrace{x-ct}_{\gamma} = \text{konst}$$

PO konstruirajmo η in γ ji $\ddot{a} = 0$ in $\ddot{c} = 0$

Za $\ddot{b}$ imamo formulo

$$\ddot{b} = \underbrace{a}_{c^2} \underbrace{f_{xx}}_{1} \underbrace{f_x}_{1} + \underbrace{b}_{0} (\underbrace{f_{xt}}_{1} \underbrace{f_t}_{-1} + \underbrace{f_{tx}}_{1} \underbrace{f_x}_{-1}) + \underbrace{c}_{-1} \underbrace{f_{tt}}_{1} \underbrace{f_t}_{-1} = 2c^2$$

Vidno, da je $\ddot{f} = 0$

Nova enačba se glasi $uc^2 v_{\eta\eta} = 0$

$$\Rightarrow v_{\eta\eta} = 0$$

$$\Rightarrow v_{\eta} = h(\eta)$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\int h(\eta) d\eta}_{f(\eta)} + g(\gamma) \Rightarrow u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

$$\begin{aligned} \eta &= x+ct \\ \gamma &= x-ct \end{aligned}$$

tig pogubni
↓

Splošna rešitev je

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Kjer sta φ, ψ poljubni funkciji

(funkcija f in g smo že porabili)

Funkciji φ in ψ moramo določiti
s pomočjo štirih dodatnih pogojev

Najprej uporabimo robni pogoji

$$u(0,t) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(ct) + \psi(-ct) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \varphi(x) + \psi(-x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = -\psi(-x)$$

To vnesemo v splošno rešitev in dobimo

$$u(x,t) = -\varphi(-(x+ct)) + \psi(x-ct) \quad (*)$$

Upoštevamo še drugi robni pogoji

$$u(l,t) = 0$$

$$\Rightarrow -\varphi(-l - \underbrace{ct}_x) + \psi(\underbrace{l - ct}_x) = 0 \quad \forall t$$

• Odto d sledi, da je

$$\psi(x+l) = \psi(x-l) \quad \forall x$$

to je ψ periodična funkcija
s periodo $2l$

Ker je $\varphi(x) = -\psi(-x)$, je tudi
 φ periodična s periodo $2l$

Upoštevamo še začetna pogoja
 $u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x)$

Če v $v(x)$ vstavimo $t=0$, dobimo

$$f(x) = u(x,0) = -\psi(-x) + \psi(x)$$

Podobno dobimo

$$g(x) = u_t(x,0) = c\psi'(-x) - c\psi'(x)$$

ker sta φ, ψ periodični s periodo $2l$,
sta tudi $f(x)$ in $g(x)$ periodični

s periodo $2l$

Iz ~~(*)~~ opazimo, da sta f in g lihi funkciji

Splošna rešitev je

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Če to vstavimo v začetna pogoja, dobimo

$$f(x) = u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x)$$

$$g(x) = u_t(x,0) = c\varphi'(x) - c\psi'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \int g(x) dx = \varphi(x) - \psi(x)$$

Odtod lahko izračunamo φ in ψ

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{c} \int g \right)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{c} \int g \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Sledi } u(x,t) &= \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{c} \int g \right) \Big|_{x+ct} + \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{c} \int g \right) \Big|_{x-ct} \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c} \left(\int_{x-ct}^{x+ct} g \right) \end{aligned}$$

Torej je

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x) dx} \quad (***)$$

Funkciji $f(x)$ in $g(x)$ sta na začetku definirani samo na intervalu $[0, l]$. Potem ju lahko razširimo na interval $[-l, l]$. Na koncu

periodično razširimo iz intervala $[-l, l]$ na $\mathbb{R}$. Tako dobijemo razširitev, potem vstavimo v formulo ~~(*)~~ in dobimo rešitev

o.) Fourierova metoda za struno
 Rešujemo isto enačbo pri istih dodatnih pogojih. Dobili bomo rešitev v drugi obliki. Ta metoda bo uporabna tudi pri drugih enačbah.

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) & u(0, t) &= 0 \\ u_x(x, 0) &= g(x) & u(l, t) &= 0 \end{aligned}$$

Rešitev enačbe iščemo z nastankom

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

ker sta $X(x)$ in $T(t)$ neznaní funkciji, ko ta nastavek vstavimo v enačbo,

$$\text{dobimo } c^2 X'' T = X T''$$

Sedaj ločimo spremenljivke

$$c^2 x'' T = x T'' \quad | : c^2 T x$$

$$\underbrace{\frac{x''}{x}}_{\text{samo od } x} = \underbrace{\frac{T''}{c^2 T}}_{\text{samo od } t}$$

Odtod sledi, da obstaja taka konstanta

λ , da velja

$$\frac{x''}{x} = \frac{T''}{c^2 T} = \lambda \quad \text{za } \forall x \forall t$$

Odpramo ulomke in dobimo
dve NDE

$$x'' - \lambda x = 0 \quad \text{in} \quad T'' - \lambda c^2 T = 0$$

Potem, tudi konstanta λ je znana.
Potrebujemo še dodatne pogoje, da
določimo λ .

Če nastavimo $u(x, t) = x(x)T(t)$ vstavimo

v robna pogoja dobimo

$$0 = u(0, t) = x(0)T(t) \quad \text{in} \quad 0 = u(l, t) = x(l)T(t).$$

- Predpostavljamo, da $T \neq 0$, sicer bi
dobili $u(x,t) = XT \equiv 0$

Odtod sledi, da je

$$X(0) = 0 \quad \text{in} \quad X(l) = 0.$$

Rešimo enačbo $X'' - \lambda X = 0$

pri pogojih $X(0) = X(l) = 0$.

Treba je ugotoviti primere $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$
 $\Rightarrow X \equiv 0$

V prvih dveh primerih dobimo samo

trivialno rešitev $X \equiv 0$. Odtod

sledi $u(x,t) = XT \equiv 0$, kar nas ne zanima.

Omejimo se na primer $\lambda < 0$

$$X'' + (\sqrt{-\lambda})^2 X = 0$$

$$\omega = \sqrt{-\lambda}$$

$$X'' + \omega^2 X = 0$$

Splošna rešitev je

$$X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

Upoštevajmo dodatna pogoja $X(0) = X(l) = 0$

• $X(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ sledi,
če vstavimo $x=0$ in upoštevamo $X(0)=0$

$$0 = X(0) = A \cos 0 + B \sin 0$$
$$= A \cdot 1 + B \cdot 0$$

$$= A$$

Torej je $A=0$

Če pa vstavimo $x=l$, dobimo

$$0 = X(l) = A \cos \omega l + B \sin \omega l$$
$$\quad \quad \quad \parallel$$
$$\quad \quad \quad 0$$

$$\text{Sledi } 0 = B \sin(\omega l)$$

Večja $B \neq 0$, sicer dobimo trivialno rešitev.

$$\text{Torej je } \sin \omega l = 0$$

Nižle sinusa so $k\pi$, torej je

$$\omega l = k\pi$$

$$\omega = \sqrt{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{k\pi}{l} =: \omega_k$$

$$\text{Odtod sledi } \lambda = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 =: \lambda_k$$

• Odtod sledi

$$X(x) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{A} \cos \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\omega} x + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{B} \sin \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\omega} x$$

$\omega = \frac{k\pi}{l}$ za nek k

Oznacimo $X_k(x) = \sin \omega_k x$
 $= \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) = \sin \frac{k\pi x}{l}$

Pozor B -ja ne pišemo, ker ga
preselimo k T -ju $u = XT$

Se danj rešimo sē enačbo za T

$$T'' - \underbrace{\lambda C^2}_{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} T = 0$$

$$T'' + \left(\frac{k\pi C}{l}\right)^2 T = 0$$

Odtod sledi, da je $T = T_k$, kjer je

$$T_k(x) = C_k \cos\left(\frac{k\pi C}{l} t\right) + D_k \sin\left(\frac{k\pi C}{l} t\right)$$

• Za vsak k dobimo rešitev

$$u_k(x,t) = X_k(x) T_k(t) \\ = \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \left(C_k \cos \frac{k\pi c}{l} t + D_k \sin \frac{k\pi c}{l} t \right)$$

Po konstrukciji u_k reši enačbo

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$

in zadošča robnim pogojema

$$u(0,t) = 0 \text{ in } u(l,t) = 0.$$

Žal pa funkcija u_k ne zadošča
npr. začetnim pogojem

Funkcij, ki zadošča tudi
začetnim pogojem iščemo z nastavitvami

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t)$$

Če na obeh straneh vstavimo $t=0$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_k u_k(x,0) = \sum_k C_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Odtod lahko izračunamo C_k -je
z razpisom v sinusno vrsto.

Podobno iz

$$u_t(x, 0) = \sum_k (u_k)_t(x, 0) =$$

" " " "

$$g(x) = \sum_k X_k(x) T_k'(0)$$

$$\sum_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \left(\frac{k\pi c}{l} D_k \right)$$

$$\text{iz } g(x) = \sum_k \left(\frac{k\pi c}{l} D_k \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

izračunamo D_k s pomočjo
razvoja v sinusno vrsto.