

•) Razvoj v sinusno vrsto

Motivacija: Če rešujemo valovno enačbo

$$c^2 u_{xx} = u_{tt} \quad \text{pri robnih pogojih}$$

$$u(0,t) = 0 \quad \text{in} \quad u(l,t) = 0, \quad \text{dobimo}$$

za rešitev nastavek

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \left(C_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + D_k \sin \frac{k\pi ct}{l} \right)$$

Koeficiente C_k in D_k bomo določili

iz začetnih pogojev

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{in} \quad u_t(x,0) = g(x)$$

Iz nastanka in iz začetnih pogojev dobimo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (*)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{l} D_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Kako sedaj določimo C_k in D_k ?

Ideja: Enačbo (*) pomnožimo z

$\sin \frac{j\pi x}{l}$ in integriramo od 0 do l

$$\text{Dobimo} \quad \int_0^l f(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l} dx$$

$$= C_j \int_0^l \left(\sin \frac{j\pi x}{l} \right)^2 dx = C_j \cdot \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow C_j = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx$$

Uporabimo antifaktorizacijsko formulo

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$\parallel$ $\parallel$
 $\frac{k\pi x}{l}$ $\frac{j\pi x}{l}$

Odtod sledi

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos \frac{(k-j)\pi x}{l} - \cos \frac{(k+j)\pi x}{l} \right] dx$$

$k \neq j$ Upoštevamo $\int \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + \text{const}$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(k-j)\pi} \sin \frac{(k-j)\pi x}{l} - \frac{l}{(k+j)\pi} \sin \frac{(k+j)\pi x}{l} \right]_0^l$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(k-j)\pi} \underbrace{\sin(k-j)\pi}_0 - \frac{l}{(k+j)\pi} \underbrace{\sin(k+j)\pi}_0 \right]$$

$$= 0$$

Povzetež: Funkcije $\sin \frac{k\pi x}{l}$ so
 paroma ortogonalne glede na
 skalarni produkt $\langle f, g \rangle = \int_0^l f(x)g(x)dx$

• če je $k \neq j$, potem dobimo

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \left[1 - \cos \frac{(k+j)\pi x}{l} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{l}{(k+j)\pi} \sin \frac{(k+j)\pi x}{l} \right]_0^l$$

$$= \frac{1}{2} \left[l - \frac{l}{(k+j)\pi} \frac{\sin(k+j)\pi}{0} \right]$$

$$= \frac{l}{2}$$

Portetek: Norma funkciji $\sin \frac{k\pi x}{l}$
glede na skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^l f(x)g(x) dx$$

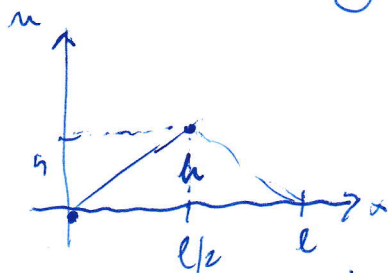
je enaka ~~$\sqrt{\frac{l}{2}}$~~ $\sqrt{\frac{l}{2}}$

Torej iz $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{l}$

sledi $C_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$

Izkaže se, da velja tudi obratno (pri določeni predpostavki na $f(x)$)

- Primer razvoja v sinusno vrsto



struna na sredini
odmaknemo za h

$$f(x) = \begin{cases} 2hx/l & 0 \leq x \leq l/2 \\ 2h(1 - \frac{x}{l}) & l/2 \leq x \leq l \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{začetna} \\ \text{oblika} \\ \text{strune} \end{array} \right\}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (k \leftrightarrow n)$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \frac{2hx}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l 2h\left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\text{Subst } t = \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow dx = \frac{l}{n\pi} dt$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2}{l} \int_0^{n\pi/2} \frac{2ht}{n\pi} \sin t \cdot \frac{l}{n\pi} dt + \frac{2}{l} \int_{n\pi/2}^{n\pi} 2h\left(1 - \frac{t}{n\pi}\right) \sin t \cdot \frac{l}{n\pi} dt$$

$$= \frac{4h}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi/2} t \sin t dt + \frac{4h}{(n\pi)^2} \int_{n\pi/2}^{n\pi} (n\pi - t) \sin t dt$$

$$\int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = \sin t - t \cos t$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{4h}{(n\pi)^2} \left[(\sin t - t \cos t) \Big|_0^{n\pi/2} + n\pi (-\cos t) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - (\sin t - t \cos t) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \right]$$

$$= \frac{4h}{(n\pi)^2} \left[\sin \frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} - n\pi \cos n\pi + n\pi \cos \frac{n\pi}{2} - (\sin n\pi - n\pi \cos n\pi) + (\sin \frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}) \right]$$

$$= \frac{8h}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

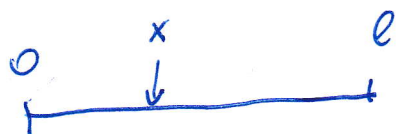
Op. Ker struna na začetku miruje, je $g(x) \equiv 0$,
torej so $D_n = 0$ za vsak n

• Toplotna enačba

Reče se ji tudi difuzijska enačba

$$a^2 u_{xx} = u_t \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t$$

$u(x, t)$ ji ~~toplotna~~ temperatura palice dolžine l na kraju x in v trenutku t



Predpostavljamo, da je palica izolirana povsod razen v krajščih.

Začetna porazdelitev temperature je $u(x, 0) = f(x)$ ← začetni pogoji

Temperatura palice v krajščih je 0

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{robni pogoja}$$

Opomba: Enačba $a^2 u_{xx} = u_t$ je parabolichnega tipa in je že v kanonični obliki.

Enačbo bomo reševali s Fourierovo metodo

Pomagamo si z nastankom

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Ta nastavek vstavimo v enačbo
in v robne pogoje.

Iz enačbe $a^2 u_{xx} = u_t$ dobimo

$$a^2 X'' T = X T'$$

Ločimo spremenljivke

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = \lambda$$

odvisno
samo od x

odvisno
samo od t

Odtod sledi, da sta obe strani
konstantni funkciji. To konstanto
pomo označili z λ

Iz robnih pogojev $u(0,t) = 0$ in $u(l,t) = 0$

pa dobimo $X(0)T(t) = 0$ in $X(l)T(t) = 0$

Ker $T(t) \neq 0 \Rightarrow X(0) = 0$ in $X(l) = 0$

Rešiti moramo $\frac{X''}{X} = \lambda$ pri $X(0) = X(l) = 0$.

Kot pri struni dobimo $X(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$ za neke

Kako rešimo enačbo $\frac{x''}{x} = \lambda$ pri $x(0) = x(l) = 0$

$x'' - \lambda x = 0$ je NDE 2. reda s konst. koef.

Rešuje se z nastavitvijo $x(x) = e^{vx}$.

Dobri' $(v^2 - \lambda) e^{vx} = 0 \Rightarrow v = \pm \sqrt{\lambda}$

Treba je ločiti tri primere

1.) $\lambda > 0$, $Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ je splošna rešitev

2.) $\lambda = 0$, $Ax + B$ je splošna rešitev

3.) $\lambda < 0$, $A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x)$

Ko upoštevamo dodatna pogoja

$x(0) = 0$ in $x(l) = 0$,

dobimo v prvem in v drugem primeru $x \equiv 0$,

kar je nezanimivo.

Zanimiv je samo tretji primer

$$x(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

Vstavimo $x=0$ in $x=l$. Dobimo

$$0 = x(0) = A \underbrace{\cos 0}_1 + B \cdot \underbrace{\sin 0}_0 = A$$

$$0 = x(l) = \underbrace{A}_0 \cos(\sqrt{-\lambda}l) + \underbrace{B}_{\neq 0} \sin(\sqrt{-\lambda}l)$$

$$\Rightarrow \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}l = k\pi \Rightarrow \lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$$

$$\Rightarrow x(x) = B \left(\sin \frac{k\pi x}{l} \right) = x_k(x)$$

Treba je rešiti še enačbo $\&$ za $T(t)$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \lambda$$

$$\frac{dT}{dt} = \lambda a^2 T$$

$$\int \frac{dT}{T} = \int \lambda a^2 dt$$

$$\ln T = \lambda a^2 t + \ln C$$

$$T = C e^{\lambda a^2 t}$$

Če vstavimo $\lambda = \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, dobimo

$$T = \underbrace{C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}}_{T_k(t)}$$

Portretek: Funkcija

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t)$$

reši tako enačbo

ne reši pa mi jo

$$= \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}$$

kot robne pogoje

začetnega pogoja

Rešitev začetnega pogoja iščemo v
mestavah

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \quad (*)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{l} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}$$

Vemo, da ta funkcija zadošča enačbi
in robnim pogojem.

Koeficiente C_k bomo izbrali tako, da
bo ta funkcija zadoščala tudi
začetnemu pogoju $u(x,0) = f(x)$.
Če v mestavk vstavimo $t=0$, dobimo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Vemo, da od tod sledi

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (**)$$

Rešitev celotne naloge (enačba + robni + začetni)
je podana z $(*)$, kjer so C_k podani z $(**)$

-) Nehomogena valorna in toplotna enačba

Nehomogena valorna enačba se glasi:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t)$$

Opisuje vsiljeno nihanje strune.

$F \leftarrow$ sila na enoto dolžine
 Vredn. $h(x, t) = \frac{F}{\rho} \leftarrow$ linearna gostota strune

Nehomogena toplotna enačba se glasi:

$$u_t = c^2 u_{xx} + h(x, t)$$

V obeh primerih uporabimo enako metodo reševanja

Omejimo se na vsiljeno nihanje strune

enačba: $u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t)$

robni: $u(0, t) = u(l, t) = 0$

začetni: $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x)$

1. korak reši homogeni del $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
 na običajni način

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ homogeni del

Uporabimo nastavek $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\text{Dobimo } T''X = c^2 X''T$$

$$\text{in } X(0)T(t) = 0 \text{ in } X(l)T(t) = 0$$

$$\text{To reži je } \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = \lambda$$

$$\text{in } X(0) = X(l) = 0$$

odtod dobimo, da je

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 =: -\lambda_k$$

$$X(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} =: X_k(x)$$

Enačbe za $T(t)$ zdajkrat se ne rešujemo

2. korak Razvijemo funkcijo $h(x,t)$

v smislu vrsto, se pravi

$$h(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \frac{\sin k\pi x}{l}$$

$$\text{kjer je } h_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l h(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

3. korak V prvo enačbo vstavim
 nastavek $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

in primerjaj iste koeficiente
 Poter: Funkcije $T_k(t)$ zasukrat se ne
 poznajo. Izpeljali bomo NDE za $T_k(t)$.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \underbrace{h(x,t)}_{\sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}}$$

$$\begin{aligned} & c^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(\sin \frac{k\pi x}{l} \right)'' \\ &= c^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(- \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \end{aligned}$$

Primerjamo koeficiente pri $\sin \frac{k\pi x}{l}$
 in dobimo

$$T_k''(t) = c^2 T_k(t) \left(- \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right) + h_k(t)$$

Dobili smo nehomogeno NDE 2. reda
 s konstantnimi koeficienti.

$$T_k'' + \left(\frac{k\pi c}{l} \right)^2 T_k = h_k$$

4. korak

Splošna rešitev enačbe

$$T_k'' + \left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2 T_k = h_k$$

(***)

je oblike

$$T_k(t) = \underbrace{v_k(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{partikularna} \\ \text{rešitev}}} + \underbrace{C_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + D_k \sin \frac{k\pi ct}{l}}_{\substack{\uparrow \\ \text{splošna rešitev} \\ \text{homogene enačbe}}}$$

Op. Partikularno rešitev poiščemo z metodo variacije konstant.

Konstanti C_k in D_k variirajo, se

pravi spremeni v funkciji $C_k(t)$ in $D_k(t)$

z nastavitvijo $C_k(t) \cos \frac{k\pi ct}{l} + D_k(t) \sin \frac{k\pi ct}{l}$

gremo v (***) in dobimo dve DE

$$C_k'(t) \cos \frac{k\pi ct}{l} + D_k'(t) \sin \frac{k\pi ct}{l} = 0$$

$$C_k'(t) \left(\cos \frac{k\pi ct}{l} \right)' + D_k'(t) \left(\sin \frac{k\pi ct}{l} \right)' = h_k(t)$$

Odtod izračunamo $C_k'(t)$ in $D_k'(t)$.

z integriranjem dobimo $C_k(t)$ in $D_k(t)$.

5. korak konstante C_k in D_k določimo tako, da nastavek zadošča začetnim pogojem $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$

Nastavek je

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{T}_k(t) + C_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + D_k \sin \frac{k\pi ct}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Če vstavimo $t=0$, dobimo

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k(0) X_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{T}_k(0) + C_k) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\Rightarrow \tilde{T}_k(0) + C_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Če pa najprej odvedemo po x in nato vstavimo $t=0$, dobimo

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k'(0) X_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{T}_k'(0) + D_k \cdot \frac{k\pi c}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\Rightarrow \tilde{T}_k'(0) + D_k \frac{k\pi c}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

• 1) Nehomogeni robni pogoji

Doslej ji bito bihveno v računanju,
da sta robna pogoja enaka 0.

Sicer ju ne moremo separirati.

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0$$

$$x(0)T(t) = 0 \quad x(l)T(t) = 0$$

$$x(0) = 0 \quad x(l) = 0$$

Če bi bili robni pogoji nemični,
potem ta trik ne deluje.

$$u(0,t) = \alpha(t) \quad u(l,t) = \beta(t)$$

$$x(0)T(t) = \alpha(t) \quad x(l)T(t) = \beta(t)$$

Odtod ne moremo izračunati

$x(0)$ in $x(l)$, torej naša

metoda ne deluje.

Ideja: S primemo substitucijsko postopimo,
da ima nova enačba ničelne robne
pogoje in jo torej lahko rešimo po starem.

Kako to naredimo?

1. korak Poiščemo tako funkcijo $w(x,t)$, ki zadošča samo robnim pogojem (ne pa tudi enačbi in začetni)

Opozorilo, da funkcija

$$w(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \alpha(t) + \frac{x}{l} \beta(t)$$

zadostja

$$w(0,t) = \alpha(t)$$

$$w(l,t) = \beta(t)$$

Torej $w(x,t)$ zadošča robnim pogojem

2. korak V enačbi in v začetnih pogojih napravimo substitucijo

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

↑
stara nemana
funkcija

↑
nova nemana
funkcija

↑
funkcija iz
prvega koraka

Če ta postavitev vstavimo v enačbo

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}, \text{ dobimo}$$

$$c^2 (v_{xx} + w_{xx}) = v_{tt} + w_{tt}$$

||
0

$$\left(1 - \frac{x}{l}\right) \alpha''(t) + \frac{x}{l} \beta''(t)$$

$$- k(x,t)$$

- Dobro

$$c^2 v_{xx} + h(x, t) = v_{tt}$$

To je nehomogena enačba

Če nastavimo $u = v + w$ vstavimo v
ročne pogoje $u(0, t) = \alpha(t)$, $u(l, t) = \beta(t)$

dobimo $v(0, t) + \underbrace{w(0, t)}_{\alpha(t)} = \alpha(t) \Rightarrow v(0, t) = 0$

$v(l, t) + \underbrace{w(l, t)}_{\beta(t)} = \beta(t) \Rightarrow v(l, t) = 0$

Dobra novica: Novi robni pogoji so
ničelni.

Slaba novica: Nova enačba je nehomogena.

Če nastavimo $u = v + w$ vstavimo v
začetne pogoje $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$,

dobimo $v(x, 0) + w(x, 0) = f(x) \Rightarrow v(x, 0) = \tilde{f}(x)$

$v_t(x, 0) + w_t(x, 0) = g(x) \Rightarrow v_t(x, 0) = \tilde{g}(x) =$

$w(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \alpha(t) + \frac{x}{l} \beta(t) = g(x) - w_t(x, 0)$

$w(x, 0) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \alpha(0) + \frac{x}{l} \beta(0) = g(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right) \alpha'(0) - \frac{x}{l} \beta'(0)$

$w_t(x, 0) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \alpha'(0) + \frac{x}{l} \beta'(0)$

•) Laplaceova enačba

To je enačba oblike

$$\Delta u = 0$$

V 1D se to glasi

$$u_{xx} = 0$$

$$u = u(x)$$

V 2D se to glasi

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u = u(x, y)$$

V 3D se to glasi

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$u = u(x, y, z)$$

Omejiti se bomo na 2D primer.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

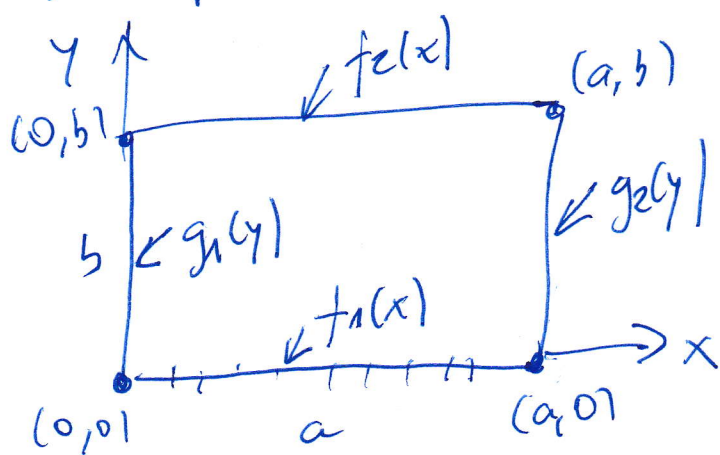
je poseben primer eliptične enačbe 2. reda.

Ta enačba je že v kanonični obliki

- Reševali jo bomo v dveh primerih
 - za pravokotnik
 - za krog

Poleg enačbe bomo potrebovali še dodatne pogoje, To bo vrednost funkcije $u(x,y)$ na robu pravokotnika oziroma kroga.

- 1) Laplaceova enačba za pravokotnik



Znotraj pravokotnika funkcija $u(x,y)$ zadošča enačbi $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Na robu pravokotnika so vrednosti funkcije $u(x,y)$ predpisane

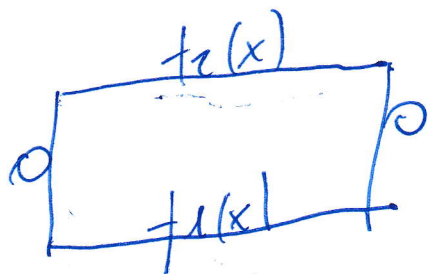
$$u(x,0) = f_1(x) \quad u(0,y) = g_1(y)$$

$$u(x,b) = f_2(x) \quad u(a,y) = g_2(y)$$

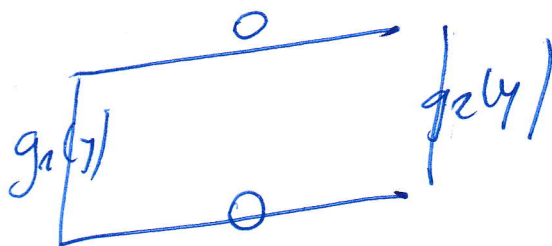
Glavni problem: Medtem od robnih pogojev ni enak nič, torej ne moremo uporabiti Fourierove metode separacije spremenljivk.

Ta problem rešimo z naslednjim trikom. Enačbo razdelimo na dva dela.

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$



$$w_{xx} + w_{yy} = 0$$



Ko bomo tu dve enačbi sesteli, bomo dobili, da funkcija

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

zadostja enačbi

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

in robnih pogojev

