

IV LAPLACEOVA

TRANSFORMACIJA

•) Definicija in primeri

Če je $f(t)$ definirana na intervalu $[0, \infty)$

Funkciji $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$ pravimo

Laplaceova transformiranka funkcije $f(t)$
(če obstaja sereda). To zapišemo kot

$$\mathcal{L}(f(t))(z) = F(z)$$

kjer je $\mathcal{L}$ preslikava iz funkcij
v funkcije. Tej preslikavi rečemo

Laplaceova transformacija.

Primeri: Izračunaj Laplaceovo transformiranko

funkcije $f(t) = 1$.

$$\mathcal{L}(1)(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \Big|_0^{\infty}$$

$$= \left. -\frac{1}{z} e^{-zt} \right|_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{z} e^{-zt} \right|_0^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{z} e^{-zb} - \left(-\frac{1}{z} \right) \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{z} (1 - e^{-zb})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-zb}}_{=0 \text{ (če } z > 0)}$$

$$= \frac{1}{z}$$

Torej je $\mathcal{L}(1)(z) = \frac{1}{z}$

Primer: $\mathcal{L}(t^n)(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} t^n dt = ?$

Uporabimo integracijo po delu

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

$$\begin{aligned} ? &= \underbrace{t^n \cdot \left(-\frac{1}{z} e^{-zt}\right)}_0 \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n t^{n-1} \left(-\frac{1}{z} e^{-zt}\right) dt \\ &= 0 + \frac{n}{z} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-zt} t^{n-1} dt}_{\mathcal{L}(t^{n-1})(z)} \end{aligned}$$

Dobili smo rekurenčno formulo

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n}{z} \mathcal{L}(t^{n-1}), \quad \mathcal{L}(1) = \frac{1}{z}$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^n) &= \frac{n}{z} \frac{n-1}{z} \frac{n-2}{z} \dots \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \\ &= \frac{n!}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

Primer: $\mathcal{L}(e^{at})(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} e^{at} dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(z-a)t} dt = \frac{1}{z-a}$$

↑
glij $\mathcal{L}(1)$

To vega tudi za kompleksne a .

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$$

$$\sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}$$

seedi iz

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos kt) &= \frac{1}{2} [\mathcal{L}(e^{ikt}) + \mathcal{L}(e^{-ikt})] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-ik} + \frac{1}{z+ik} \right] = \frac{z}{z^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin kt) &= \frac{1}{2i} [\mathcal{L}(e^{ikt}) - \mathcal{L}(e^{-ikt})] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{z-ik} - \frac{1}{z+ik} \right] = \frac{k}{z^2 + k^2} \end{aligned}$$

Tabela osnovnih Lapl. transformiranih

$f(t)$	$F(z)$
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$\cos kt$	$\frac{z}{z^2 + k^2}$
$\sin kt$	$\frac{k}{z^2 + k^2}$

$f(t)$	$F(z)$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$
$e^{at} \cos kt$	$\frac{z-a}{(z-a)^2 + k^2}$
$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(z-a)^2 + k^2}$

Dokazimo naslednje formulo

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z-a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{at} f(t))(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} \cancel{f(t)} e^{at} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(z-a)t} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad \leftarrow \text{zamenjaj } z \rightarrow z-a \\ \Rightarrow \mathcal{L}(f(t))(z-a) &= \int_0^{\infty} e^{-(z-a)t} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}(e^{at} f(t))(z) \end{aligned}$$

Opomba: Opatili smo že, da je

Laplaceova transformacija linearna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t))(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) dt \\ &= \alpha_1 \int_0^{\infty} e^{-zt} f_1(t) dt + \alpha_2 \int_0^{\infty} e^{-zt} f_2(t) dt \\ &= \alpha_1 \mathcal{L}(f_1(t))(z) + \alpha_2 \mathcal{L}(f_2(t))(z) \end{aligned}$$

Na kratko

$$\mathcal{L}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \mathcal{L}(f_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(f_2)$$

•) Obstoje in enoličnost

Najprej si pogledajmo primer, kjer
Laplaceova transformiranka ne obstaja

Naj bo $f(t) = e^{t^2}$

Potem je $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} e^{t^2} dt$

Velja $\frac{e^{-zt} e^{t^2}}{e^{t^2 - zt}} \rightarrow +\infty$, ko $t \rightarrow +\infty$

Torej $F(z)$ ne obstaja

Kaj je problem? $f(t)$ je prehitro naraščala

Nauk: Če hočemo zagotoviti obstoj
integrala $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$, potem

$f(t)$ ne sme prehitro naraščati

Zato se bomo omejili na poseben
razred funkcij, ki jim pravimo
funkciji eksponentnega naraščanja.

Smisel: Dovolj počasi naraščajo, da $L(f(t))$
obstaja.

Def. Funkcija $f(t)$ je eksponentnega
naraščanja če velja

1. je definirana in odsekoma zveena
na $[0, +\infty)$ ($\Rightarrow \int_0^b$ obstaja, kjer $b < +\infty$)
2. obstajajo taki $M, N, k \in \mathbb{R}$, da velja
 $|f(t)| \leq M e^{kt}$ za vsak $t \geq N$

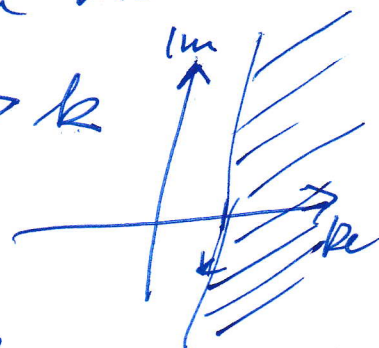
Ekstremni preh za L.T.

Vsaka funkcija eksponentnega
naraščanja $f(t)$ ima Laplaceovo
transformirano $\mathcal{L}(f(t))(z)$.

Poleg tega velja naslednje.

•) $\mathcal{L}(f(t))(z)$ je definirana za vsak
 $z \in \mathbb{C}$, ki zadošča $\operatorname{Re} z > k$

•) $\mathcal{L}(f(t))(z)$ je analitična
funkcija na območju $\operatorname{Re} z > k$



Preh o enoličnosti: Če imata dve funkciji
esp. naraščanja enako L.T., potem sta enaki.

• Inverzna Laplaceova transformacija

Dana je funkcija $F(z)$.

Iščemo tako funkcijo $f(t)$, da velja:

$$\mathcal{L}(f(t)|t) = F(z)$$

Če taka funkcija obstaja, potem
nam izrek o enoličnosti pove,
da je enolično določena z $F(z)$.

Pravno, da je $f(t)$ inverzna Lapl.
transformiranka funkcije $F(z)$.

Pišemo: $\mathcal{L}^{-1}(F(z)|t) = f(t)$

Tabelo inverznih L.T. dobimo
tako, da v tabeli L.T. zamenjamo
prvi in drugi stolpec.

Potrebovali bomo tudi inverzne L.T.
od funkcij, ki niso v tabeli.
Zlasti od racionalnih funkcij;
ker je števec nižje stopnje kot menovalec.

- Ogleдали si bomo tri metode za računanje inverznih L.T. od racionalnih funkcij
- metoda parcialnih ulomkov
- metoda residuov
- metoda konvolucij

(A) Metoda parcialnih ulomkov

Naj bo $F(z)$ racionalna funkcija, kjer je številec nižje stopnje kot imenovalec. Tako funkcijo lahko razstavimo na parcialne ulomke. Zato ~~ta~~ potrebujemo l.h.t. od parcialnih ulomkov

$$\frac{A}{(z-a)^m} + \frac{Bz+C}{(z^2+bz+c)^n}$$

— minimal. real. model.

↑
je že znano

$$\mathcal{L}(e^{at} t^m)(z) = \frac{m!}{(z-a)^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z-a)^m}\right)(t) = e^{at} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$$

te že znano v primeni, ko je $m=1$

$$\frac{\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{4}}_{>0}}{(z-a)^2 + k^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{cz+d}{(z-a)^2+k^2}\right)(t) = ?$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{c(z-a) + ac+d}{(z-a)^2+k^2}\right)(t)$$

$$= c \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z-a}{(z-a)^2+k^2}\right)(t) + \frac{ac+d}{k} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{(z-a)^2+k^2}\right)(t)$$

$$= c e^{at} \cos kt + \frac{ac+d}{k} e^{at} \sin kt$$

Kaj pa parcialni ulomki, kjer imajo kvadratni faktorji menovalca stopnjo ≥ 1 ?

Ema možna rešitev: Naredi razcep na parcialne ulomke $\checkmark$ kompleksnih števil $\frac{A}{(z-a)^n} \leftarrow$ vsi so taki za kompleksne a .

Druga možna rešitev je metoda (B).

(B) Metoda residuov

Naj bo $F(z)$ racionalna funkcija, kjer je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca. Potem velja

$$\mathcal{L}^{-1}(F(z))(t) = \sum_k \text{Res}(e^{zt} F(z), z_k)$$

kjer so z_k vsi poli funkcije $F(z)$.

Primer $F(z) = \frac{cz+d}{(z-a)^2+k^2} = \frac{cz+d}{(z-z_1)(z-z_2)}$

Ta funkcija ima dva pola pvestopnje $z_1 = a+ik$ in $z_2 = a-ik$

$$\text{Res}(e^{zt} F(z), z_1) + \text{Res}(e^{zt} F(z), z_2) = \mathcal{L}^{-1}(F(z))$$

$$\lim_{z \rightarrow z_1} (z-z_1) e^{zt} F(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_1} e^{zt} \frac{cz+d}{z-z_2}$$

$$e^{z_1 t} \frac{cz_1+d}{(z_1-z_2)} \quad \uparrow \quad 2ik$$

$$\lim_{z \rightarrow z_2} (z-z_2) e^{zt} F(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_2} e^{zt} \frac{cz+d}{z-z_1}$$

$$e^{z_2 t} \frac{cz_2+d}{(z_2-z_1)} \quad \downarrow \quad -2ik$$

Torej je $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{cz+d}{(z-a)^2+k^2} \right) (t)$

$$= e^{(a+ik)t} \frac{c(a+ik)+d}{2ik} + e^{(a-ik)t} \frac{c(a-ik)+d}{-2ik}$$

$$= e^{at} (\cos kt + i \sin kt) \left(\frac{ca+d}{2ik} + \frac{cik}{2ik} \right) + e^{at} (\cos kt - i \sin kt) \left(\frac{ca+d}{-2ik} + \frac{cik}{2ik} \right)$$

$$= \dots$$

= isto kot prej

Primer: $F(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$

Imamo dva pola druge stopnje i in $-i$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(z))(t) = \text{Res}(e^{zt} F(z), i) + \text{Res}(e^{zt} F(z), -i)$$

Uporabimo formulo za residuum v polu drugega reda

$$\text{Res}(e^{zt} F(z), i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 e^{zt} F(z) \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[e^{zt} \frac{1}{(z+i)^2} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \left[t e^{zt} \frac{1}{(z+i)^2} + e^{zt} \cdot \frac{-2}{(z+i)^3} \right]$$

$$= te^{it} \frac{1}{-4} + e^{it} \cdot \frac{-2}{8(-i) \cdot i}$$

$$= t(\cos t + i \sin t) \frac{-1}{4} + (\cos t + i \sin t) \frac{-i}{4}$$

Podobno dobimo

$$\text{Res}(e^{zt} F(z), -i)$$

$$= te^{-it} \frac{1}{-4} + e^{-it} \frac{-2}{8i}$$

$$= t(\cos t - i \sin t) \frac{-1}{4} + (\cos t - i \sin t) \cdot \frac{i}{4}$$

Vsota obeh residueov je

$$t \cos t \cdot \frac{-1}{2} + 0 + 0 + \sin t \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t)$$

© Metoda konvolucij

Za funkciji $f(t)$ i $g(t)$, ki sta definirani na $[0, \infty)$ definiramo njuno konvolucijo

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

Primer $f(t) = \sin t$, $g(t) = \sin t$

$$(f * g)(t) = \int_0^t \sin s \sin(t-s) ds$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(s - (t-s)) - \cos(s + (t-s))] ds$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(2s - t) - \cos t] ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2s - t) ds - \frac{1}{2} \cos t \int_0^t ds$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2s - t) \Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin(-t)$$

$$= \sin t$$

$$= \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$$

$$= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t)$$

Izrek o konvoluciji

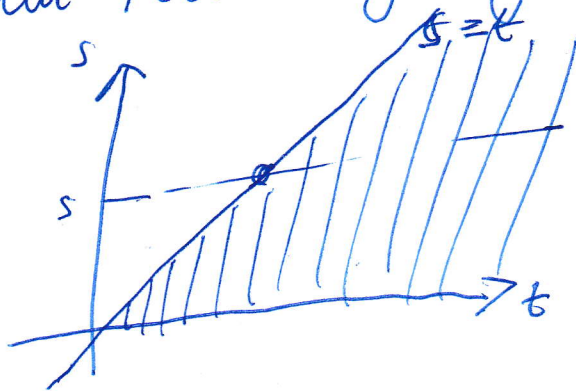
$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \mathcal{L}(g)$$

Izpeljava:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} (f * g)(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-zt} \left(\int_0^t f(s) g(t-s) ds \right) dt = ? \end{aligned}$$

Zamenjamo vrstni red integracije po s in t

Pomožna skica



$$\int_0^{\infty} \int_0^t ds dt = \int_0^{\infty} \int_s^{\infty} dt ds$$

$$? = \int_0^{\infty} \left(\int_s^{\infty} e^{-zt} f(s) g(t-s) dt \right) ds$$

$$\text{Nastek} = \int_0^{\infty} \left[f(s) \int_s^{\infty} e^{-zt} g(t-s) dt \right] ds$$

subst. $u = t - s$
 $\Rightarrow t = u + s$
 $\Rightarrow dt = du$

$$= \int_0^{\infty} \left[f(s) \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-z(u+s)}}_{e^{-zu} e^{-zs}} g(u) du \right] ds$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-zs} f(s) \left[\int_0^{\infty} e^{-zu} g(u) du \right] ds$$

ni odvisno od z !

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-zs} f(s) ds}_{\mathcal{L}(f)(z)} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-zu} g(u) du}_{\mathcal{L}(g)(z)}$$

$$\mathcal{L}(f)(z)$$

$$\mathcal{L}(g)(z)$$

Torej je res $\mathcal{L}(f * g)(z) = \underbrace{\mathcal{L}(f)(z)}_{F(z)} \underbrace{\mathcal{L}(g)(z)}_{G(z)}$

Na obeh straneh uporabimo $\mathcal{L}^{-1}$

Dobimo $\mathcal{L}^{-1}(F(z)G(z))(t) = (f * g)(t) = ?$

Upoštevamo $\mathcal{L}^{-1}(F(z))(t) = f(t)$

in $\mathcal{L}^{-1}(G(z))(t) = g(t)$

$$? = \mathcal{L}^{-1}(F(z)) * \mathcal{L}^{-1}(G(z))(t)$$

Na kratko: $\mathcal{L}^{-1}(FG) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G)$

metoda konvolucije za inverzne lapl. trans.

• Primer

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}\right) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)}_{\sin t} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)}_{\sin t} \\ = (\sin \otimes \sin)(t) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)}}$$

•) Laplaceova transformiranka odvoda

Pri reševanju diferencialnih enačb (tako navadnih kot parcialnih) bomo večkrat potrebovali, kako se

$\mathcal{L}(f')$ izraža z $\mathcal{L}(f)$

Izpeljava: $\mathcal{L}(f'(t))(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f'(t) dt =$

$$= e^{-zt} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-z) e^{-zt} f(t) dt$$

$\overset{\text{Kot. in } z > k}{=} -f(0) + z \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$

$$= -f(0) + z \mathcal{L}(f(t))(z)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(f'(t))(z) = -f(0) + z \mathcal{L}(f(t))(z)}$$

Laplaceova transformiranka odvoda
 če namesto $f(t)$ vstavimo $f'(t)$,
 dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f''(t))(z) &= -f'(0) + z \mathcal{L}(f'(t))(z) \\ &= -f'(0) + z (-f(0) + z \mathcal{L}(f(t))(z)) \\ &= -f'(0) - z f(0) + z^2 \mathcal{L}(f(t))(z) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(f''(t))(z) = -f'(0) - z f(0) + z^2 \mathcal{L}(f(t))(z)}$$

Laplaceova transformiranka drugega
 odvoda.

•) Reševanje NDE z L.T.

Oglejmo si konkreten primer

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = e^{2t} \quad \left\{ \cdot e^{-t} \int_0^{\infty} \right.$$

$$\underline{y(0)=0}, \quad \underline{y'(0)=1}$$

Rešimo z L.T.

$$\mathcal{L}(y''(t)) - \mathcal{L}(y'(t)) - 2\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(e^{2t})$$

Upoštevamo

$$\mathcal{L}(y'(t))|_z = \underbrace{-y(0)}_{=0} + z \mathcal{L}(y(t))(z)$$

$$= z \mathcal{L}(y(t))(z)$$

$$\mathcal{L}(y''(t))|_z = \underbrace{-y'(0)}_1 - z \underbrace{y(0)}_0 + z^2 \mathcal{L}(y(t))(z)$$

$$= -1 + z^2 \mathcal{L}(y(t))(z)$$

$$\mathcal{L}(e^{2t})(z) = \frac{1}{z-2}$$

ko to vstavimo v enačbo

$$\mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{2t})$$

dobimo

$$-1 + z^2 \mathcal{L}(y) - [z \mathcal{L}(y)] - 2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{z-2}$$

Uredimo

$$\underbrace{(z^2 - z - 2)}_{(z-2)(z+1)} \mathcal{L}(y) = \underbrace{\frac{1}{z-2} + 1}_{\frac{1+z-2}{z-2} = \frac{z-1}{z-2}}$$

Delimo $z^2 - z - 2$ in dobimo

$$\mathcal{L}(y) = \frac{z-1}{(z-2)^2(z+1)}$$

Izračunaj l.l.T.

Razstavimo na parcialne ulomke

$$\mathcal{L}(y) = \underbrace{-\frac{2}{9} \frac{1}{z+1}}_{\text{tabela} \rightarrow \mathcal{L}(e^{-t})} + \underbrace{\frac{2}{9} \frac{1}{z-2}}_{\mathcal{L}(e^{2t})} + \frac{1}{3} \frac{1}{(z-2)^2} \mathcal{L}(te^{2t})$$

$$\text{linearnost} \Rightarrow \mathcal{L}\left(-\frac{2}{9}e^{-t} + \frac{2}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{2t}\right)$$

Po izreku o enoličnosti, odtod sledi

$$y(t) = \underbrace{-\frac{2}{9}e^{-t} + \frac{2}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{2t}}$$