

Cilj za danes: Reševanje PDE z Laplaceovo transformacijo
za ogrevanje ponovno reševanje NDE

Primer $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$

$y(0) = 0, y'(0) = 1$

Enačbo pomnožimo z e^{-zt} in obe strani integriramo od 0 do ∞

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y'' e^{-zt} dt - 2 \int_0^{\infty} y' e^{-zt} dt + 2 \int_0^{\infty} y e^{-zt} dt &= \int_0^{\infty} e^{-zt} e^{-t} dt \\ &= -y'(t) e^{-zt} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-z) y e^{-zt} dt + 2 \int_0^{\infty} y e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(z+1)t} dt \\ &= -y'(0) - z y(0) + z \int_0^{\infty} y e^{-zt} dt + 2 \int_0^{\infty} y e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{z+1} dt \\ &= -1 + z^2 y(z) = z y(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 + z^2 y(z) - 2z y(z) + 2y(z) &= \frac{1}{z+1} \\ (z^2 - 2z + 2) y(z) &= \frac{1}{z+1} + 1 = \frac{z+2}{z+1} \end{aligned}$$

$$y(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z^2-2z+2)} = \mathcal{L}(y(t))(z)$$

$$= \frac{1}{5} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{5} \frac{z-1}{(z-1)^2+1} + \frac{9}{5} \frac{1}{(z-1)^2+1}$$

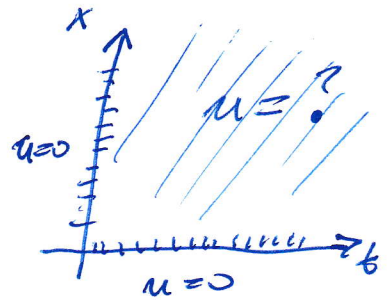
$\mathcal{L}(e^t)$ $\mathcal{L}(e^t \cos t)$ $\mathcal{L}(e^t \sin t)$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{1}{5} e^t \cos t + \frac{9}{5} e^t \sin t$$

Podoben postopek deluje tudi za PDE

Primer: $u_x + u_t = x \quad x > 0, t > 0$

$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$



Obe strani pomnožimo z e^{-zt}

in integriramo od 0 do ∞

$$\int_0^{\infty} u_x e^{-zt} dt + \int_0^{\infty} u_t e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} x e^{-zt} dt$$

zamenujemo
integriranje po t

in odvajanje po x

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u e^{-zt} dt$$

$$= u e^{-zt} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u (-z) e^{-zt} dt = x/z$$

$$= - \underbrace{u(x, 0)}_{=0} + z \int_0^{\infty} u e^{-zt} dt$$

Označimo $U(x, z) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-zt} dt$
= L.T. od $u(x, t)$ po t

Transformirana enačba se torej glasi

$$\frac{\partial U}{\partial x} + z U = \frac{x}{z}$$

To je konec prvega koraka.

Drugi korak je reševanje transformirane enačbe

$$\frac{\partial U}{\partial x} + zU = \frac{x}{z}$$

To je ODE po x . Spremenljivko z obravnavamo kot parameter

$$U' + zU = \frac{x}{z}$$

$$U' = \frac{\partial U}{\partial x}$$

To je linearna dif. enačba prvega reda.

Najprej rešimo homogeni del:

$$U' + zU = 0$$

$$\frac{dU}{dx} = -zU$$

$$\frac{dU}{U} = -z dx$$

$$\int \frac{dU}{U} = - \int z dx$$

$$\ln U = -zx + \ln C$$

$$U = Ce^{-zx}$$

Variacija konstante: $C \rightarrow C(x)$

TO vstavimo v nehomogeno enačbo in dobimo

$$\underbrace{C' e^{-zx}}_{U'} + \underbrace{C \cdot (-z) e^{-zx}}_{zU} + \frac{z C e^{-zx}}{zU} = \frac{x}{z}$$

$$\text{Sledi } C' = \frac{x}{z} e^{zx}$$

$$C = \int \frac{x}{z} \underbrace{e^{xz}}_{(e^{xz})'} dx = \frac{x}{z} \cdot \frac{e^{xz}}{z} - \int \frac{1}{z} \frac{e^{xz}}{z} dx$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 f g' f g f' g

$$= \frac{x}{z} \frac{e^{xz}}{z} - \frac{1}{z^2} e^{xz} + C$$

↙ neodvisno od x
ampak odvisno
od z

Odtod sledi, da je

$$U(x, z) = U = C e^{-xz}$$

$$= \frac{x}{z^2} - \frac{1}{z^3} + C e^{-xz} \quad (*)$$

Sedaj določimo konstanto C .

Pomagamo si z robnim pogojem $u(0, t) = 0$.

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} u(0, t) e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} 0 dt = 0$$

$$\int_0^{\infty} u(x, t) e^{-zt} dt \Big|_{x=0}$$

$$U(0, z) = 0$$

$$U(x, z) \Big|_{x=0} = U(0, z)$$

Če v (*) vstavimo $x=0$, dobimo

$$U(0, z) = \frac{0}{z^2} - \frac{1}{z^3} + C e^0 \Rightarrow C = \frac{1}{z^3}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 0 0 C

Odtoda sledi:

$$U(x, z) = \frac{x}{z^2} - \frac{1}{z^3} + c e^{-xz}$$
$$= \frac{x}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^3} e^{-xz}$$

To je konec drugega koraka.

Dobili smo resitev transformirane enačbe (in transformiranega robnega pogoja)

Tretji korak je računanje inverzne Laplaceove transformacije.

$$U(x, z) = \int_0^{\infty} \underbrace{u(x, t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{tega iščemo}}} e^{-zt} dt$$

↑
tega smo
izračunali

↑
tega iščemo
 $\times \frac{e^{-1/z^2}}{\mathcal{L}(t)(z)}$

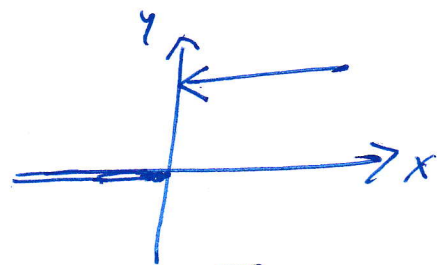
Opazmo, da je $\frac{x}{z^2} = \mathcal{L}(xt)(z)$
(Formulo $\mathcal{L}(t)(z) = \frac{1}{z^2}$ smo pomnožili z x)

Velja tudi $-\frac{1}{z^3} = \mathcal{L}\left(-\frac{t^2}{2}\right)(z)$
(Formulo $\mathcal{L}(t^2)(z) = \frac{2}{z^3}$ smo pomnožili z $-\frac{1}{2}$)

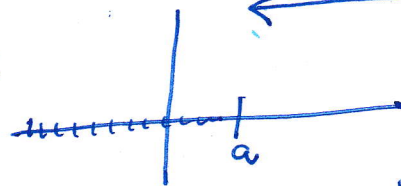
Pri računanju inverzne Laplaceove transformacije
 $\frac{1}{z^3} e^{-xz}$ rabimo ponovni račun.

Pomožni račun: Formula za premik originala v desno.

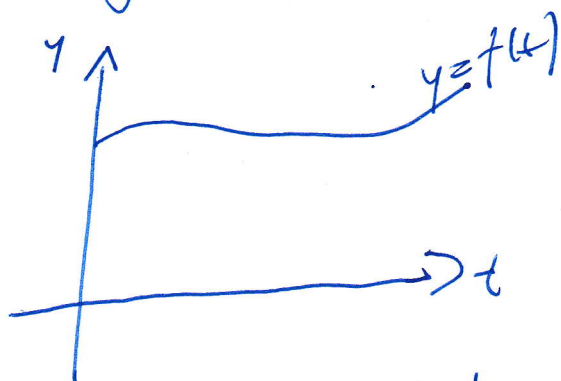
Označimo $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$



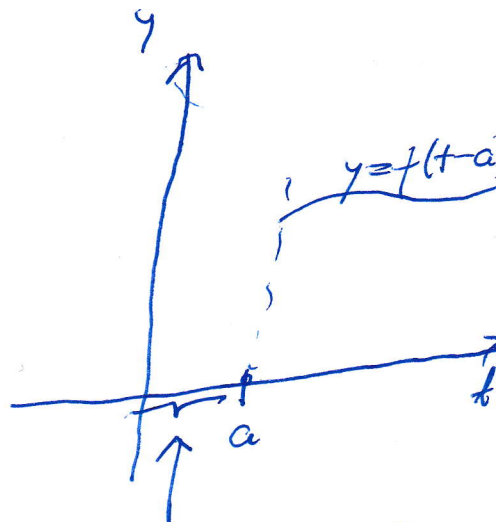
Graf funkcije $H(x-a)$



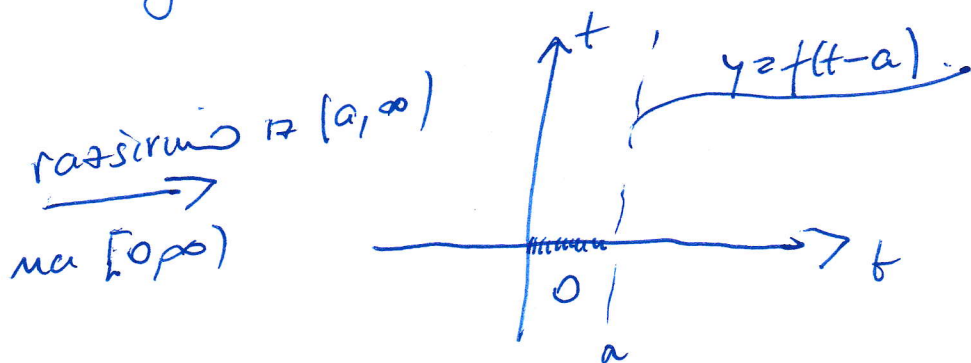
To je pomožna funkcija



premaknemo
za a v desno



To je razširjena funkcija



razširjeno na $[a, \infty)$
na $[0, \infty)$

7 Razširjena funkcija bomo označili z
 $f(t-a)H(t-a)$

Radi bi izračunali Laplaceovo transform.
od te razširjene funkcije.

$$\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))(z)$$

$$= \int_0^{\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-zt} dt = \int_0^a + \int_a^{\infty}$$

$$= \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-zt} dt = ?$$

Uvedemo novo spremenljivko $s = t - a$
 $\Rightarrow ds = dt$

$$? = \int_0^{\infty} f(s) \frac{e^{-z(a+s)}}{e^{-za}e^{-zs}} ds$$

$$= e^{-za} \int_0^{\infty} f(s) e^{-zs} ds$$

$$\underline{\mathcal{L}(f)(z)}$$

Povezek: Dokazali smo formulo

$$\boxed{\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))(z) = e^{-za} \mathcal{L}(f(t))(z)}$$

To je formula za premik originala v desno.

Nadajevanje PDE

Ždaj lahko uporabimo inv. lapl. trans.

$$\text{od } \frac{1}{z^3} e^{-xz} = \mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right)(z) \cdot e^{-xz}$$

$\uparrow$ to je $f(t)$ iz formule
 $\uparrow$ to je a iz formule

$$= \mathcal{L}(f(t))(z) e^{-xz}$$

formuli

$$= \mathcal{L}(f(t-a) \#(t-a))(z)$$

$$f(t) = \frac{t^2}{2}, a=x$$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{(t-x)^2}{2} \#(t-x)\right)(z)$$

Povzetek

$$\underbrace{\mathcal{L}(u(x,t))}_{U(x,z)}(z) = \mathcal{L}(xt)(z) + \mathcal{L}\left(-\frac{t^2}{2}\right)(z) + \mathcal{L}\left(\frac{(t-x)^2}{2} \#(t-x)\right)(z)$$

Iz enoličnosti Laplaceove transformacije

dobimo

$$u(x,t) = xt - \frac{t^2}{2} + \frac{(t-x)^2}{2} \#(t-x)$$

- Reševanje valovne enačbe z Laplaceovo transformacijo

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$

začetni pogoji : $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$

robni pogoji : $u(0, t) = 0, u(l, t) = \sin \omega t$

1. korak Enačbo transformiramo

$$U(x, z) := \int_0^\infty e^{-zt} u(x, t) dt$$

= L.T. od $u(x, t)$ po t

Na obeh straneh enačbe $c^2 u_{xx} = u_{tt}$ uporabimo L.T. po t .

$$\mathcal{L}(u_{tt}) = \int_0^\infty u_{tt}(x, t) e^{-zt} dt$$

← ali formula za L.T. drugega odvoda

$$\stackrel{\text{2x per partes}}{=} -u_t(x, 0) - z u(x, 0) + z^2 U(x, z)$$

začetni pogoji

$$= z^2 U(x, z)$$

$$\mathcal{L}(c^2 u_{xx}) = \int_0^\infty c^2 u_{xx}(x, t) e^{-zt} dt$$

→ zamenjamo vrstni red integriranja po t in odvajanja po x

$$= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underbrace{\int_0^\infty u(x, t) e^{-zt} dt}_{U(x, z)} = c^2 U_{xx}(x, z)$$

Transformirana enačba se torej glasi

$$c^2 U_{xx} = z^2 U$$

$$(kjer \quad U = U(x, z) = \int_0^\infty e^{-zt} u(x, t) dt)$$

2. korak Reševanje transformirane enačbe.

To je navadna diferencialna enačba po x . Spremenljivko z smatramo za parameter.

Rešitev iščemo z nastavitvijo $U = e^{\lambda x}$

$$c^2 \lambda^2 e^{\lambda x} = z^2 e^{\lambda x} \quad \} : e^{\lambda x}$$

$$c^2 \lambda^2 = z^2$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

$$\lambda = \pm \frac{z}{c}$$

Rešitev transformirane enačbe je torej

$$U = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x}$$

$$= A e^{zx/c} + B e^{-zx/c}$$

A in B sta konstanti glede na x , sta pa odvisni od z .

Določimo konstanti A in B s pomočjo robnih pogojev

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = \sin \omega t$$

Najprej uporabimo Lapl. transf. na robnih pogojih

Oba robna pogoja pomnožimo z e^{-z} in integriramo od 0 do ∞ .

Iz prvega robnega pogoja sledi:

$$U(0,z) = \mathcal{L}(u(0,t))(z) = 0$$

Iz drugega robnega pogoja pa sledi:

$$\begin{aligned} U(l,z) &= \mathcal{L}(u(l,t))(z) \\ &= \mathcal{L}(\sin \omega t)(z) \\ &= \frac{\omega}{\omega^2 + z^2} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad U(x,z) = A e^{xz/c} + B e^{-xz/c}$$

Vstavimo $x=0$, dobimo

$$0 = U(0,z) = A + B \Rightarrow B = -A$$

Če vstavimo $x=l$, dobimo

$$\frac{\omega}{\omega^2 + z^2} = U(l,z) = A e^{lz/c} + B e^{-lz/c} = 2A \sinh \frac{lz}{c}$$

-A

Odtod sledi, da je

$$2A = \frac{\omega}{(\omega^2 + z^2)} \operatorname{sh}\left(\frac{lz}{c}\right), \quad B = -A$$

Torej je

$$U(x, z) = \frac{\omega}{\omega^2 + z^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{xz}{c}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{lz}{c}\right)}$$

To je konec 2. koraka.

Dobili smo rešitev transf. enačbe

3. korak Računani inverte Laplaceove transformacije

Funkcija $U(x, z)$ sicer ni racionalna, ampak izkaže se, da lahko uporabimo isto metodo – metodo residuumov

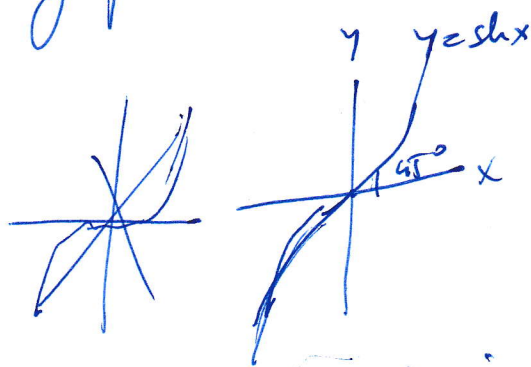
$$u(x, t) = \sum_k \operatorname{Res}(e^{zt} U(x, z), z_k)$$

kjer z_k teče po vseh polih funkcije $U(x, z)$

Poli so ničle imenovalca:

$\pm i\omega$ sta ničli od $\omega^2 + z^2$

Kaj pa to ničle od $\operatorname{sh}\left(\frac{lz}{c}\right)$?



$\operatorname{sh} x$ ima eno samo
realno ničlo.

Kako določimo kompleksne ničle sh ?

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \boxed{i \sin x = \operatorname{sh}(ix)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sh}(ik\pi) = i \sin k\pi = 0$$

Ničle od sh so torej $ik\pi$, kjer $k \in \mathbb{Z}$.

Rešimo $\frac{lz}{c} = ik\pi$

Dobimo $z = \frac{ik\pi c}{l}$

Opazimo, da $k=0$ ni da pola
($z=0$ ji odpravlja singularnost).

Ostale pole grupiramo v pare

$$z_k = \pm \frac{ik\pi c}{l} \quad k \in \mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$$

Kaj če se kateri od teh polov ujema
 $z \pm i\omega$. Potem imamo pol. druge stopnje

Fizikalno to pomeni, da je struja v resonanci

Omejimo se na primer, ko to ni res se pravi $\omega \neq \frac{kc}{l}$ za vse k

Potem so mi polji prve stopnje in je zelo preprosto izračunati residue.

$$U(x, \tau) = \frac{\omega}{\omega^2 + \tau^2} \frac{\text{sh}\left(\frac{x\tau}{c}\right)}{\text{sh}\left(\frac{l\tau}{c}\right)}$$

$$\text{Res}(e^{\tau t} U, i\omega) + \text{Res}(e^{\tau t} U, -i\omega)$$

$$e^{i\omega t} \frac{\omega}{2i\omega} \frac{\text{sh}\left(\frac{x \cdot i\omega}{c}\right)}{\text{sh}\left(\frac{l \cdot i\omega}{c}\right)} + e^{-i\omega t} \frac{\omega}{-2i\omega} \frac{\text{sh}\left(\frac{x \cdot (-i\omega)}{c}\right)}{\text{sh}\left(\frac{l \cdot (-i\omega)}{c}\right)}$$

$$= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \frac{\text{sh}\left(\frac{x \cdot i\omega}{c}\right)}{\text{sh}\left(\frac{l \cdot i\omega}{c}\right)}$$

$$= \sin \omega t \cdot \frac{\sin(x\omega/c)}{\sin(l\omega/c)}$$

$$\text{Res}\left(e^{zt} U, \frac{ik\pi c}{l}\right) + \text{Res}\left(e^{zt} U, -\frac{ik\pi c}{l}\right)$$

$$e^{ik\pi ct/l} \frac{\frac{1}{l} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{l} \cdot \frac{ik\pi c}{l} \right)}{\frac{l}{c} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{l} \cdot \frac{ik\pi c}{l} \right)} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + \left(\frac{ik\pi c}{l} \right)^2} + \dots$$

$$e^{ik\pi ct/l} \frac{i \sin \frac{k\pi x}{l}}{\frac{l}{c} \frac{\cos k\pi}{(-1)^k}} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi c}{l} \right)^2} +$$

$$+ e^{-ik\pi ct/l} \frac{-i \sin \frac{k\pi x}{l}}{\frac{l}{c} (-1)^k} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi c}{l} \right)^2}$$

$$= \frac{\sin \frac{k\pi ct}{l}}{l} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \frac{\omega c}{l} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi c}{l} \right)^2} \cdot (-2)$$

$$\frac{e^{ik\pi ct/l} + e^{-ik\pi ct/l}}{2i}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{2\omega c}{l} \frac{1}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi c}{l} \right)^2} \sin \frac{k\pi ct}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

končni rezultat

$$u(x,t) = \sin \omega t + \frac{\sin\left(\frac{x\omega}{c}\right)}{\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi c}{l} \right)^2} \sin \frac{k\pi ct}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Reševanje toplotne enačbe z Laplaceovo transformacijo

$u_{xx} = u_t$ toplotna enačba, $x \in \mathbb{R}$

$u(x, 0) = f(x)$ začetni pogoji

To je prevažanje toplote po neskončni palici



1. korak transformiramo enačbo

$$\int_0^{\infty} u_{xx} e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} u_t e^{-zt} dt$$

$u_{xx}(x, z)$ $- \underbrace{u(x, 0)}_{f(x)} + z U(x, z)$

Definiramo $U(x, z) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-zt} dt$

Transformirana enačba se glasi

$$u_{xx} = -f(x) + zU$$

To je nehomogena linearna dif. enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti.

Rešuje se z metodo variacije konstant (Ponovi do pridružit!!)