

• 1) Reševanje toplotne enačbe z L.T.

Primer: Prevajanje toplote po neskončni palici

$$u_{xx} = u_t \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{začetni pogoj}$$

$u(x, t)$ je omejena funkcija

Obe strani enačbe pomnožimo z e^{-zt} in integriramo od 0 do ∞ .

$$\int_0^\infty u_{xx} e^{-zt} dt = \int_0^\infty u_t e^{-zt} dt$$

Oznach $U(x, z) = \mathcal{L}[u] = \int_0^\infty u(x, t) e^{-zt} dt$

$$\downarrow U_{xx}(x, z) = -\frac{u(x, 0)}{f(x)} + z U(x, z)$$

Transformirana enačba se torej glasi

$$U_{xx} - zU = -f(x) \quad (*)$$

To je NDE 2. reda s konst. koef.

1. korak rešimo homogeni del $U_{xx} - zU = 0$
z nastavekom $U = e^{\lambda x}$. Dobimo $\lambda^2 = z$.

$$\text{Torej je } U = C_1 e^{x\sqrt{z}} + C_2 e^{-x\sqrt{z}}$$

2. korak Variiramo konstanti $C_1 \rightarrow C_1(x)$, $C_2 \rightarrow C_2(x)$
in nastavek $U = C_1(x) e^{x\sqrt{z}} + C_2(x) e^{-x\sqrt{z}}$
vstavimo v prvotno nehomogeno enačbo (*)

- Dobmo sistem dveh linearnih enačb za C_1' in C_2'

$$C_1' e^{x\sqrt{z}} + C_2' e^{-x\sqrt{z}} = 0$$

$$C_1' \underbrace{(e^{x\sqrt{z}})'}_{\sqrt{z} e^{x\sqrt{z}}} + C_2' \underbrace{(e^{-x\sqrt{z}})'}_{-\sqrt{z} e^{-x\sqrt{z}}} = -f(x) \quad \left\{ : \sqrt{z} \right.$$

$$\Rightarrow C_1' e^{x\sqrt{z}} - C_2' e^{-x\sqrt{z}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{z}}$$

Če enačbi sestavimo, dobimo

$$2C_1' e^{x\sqrt{z}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{z}} \Rightarrow C_1' = \frac{-f(x)}{2\sqrt{z}} e^{-x\sqrt{z}}$$

Če enačbi odštejemo, dobimo

$$2C_2' e^{-x\sqrt{z}} = \frac{f(x)}{\sqrt{z}} \Rightarrow C_2' = \frac{f(x)}{2\sqrt{z}} e^{x\sqrt{z}}$$

Odtod lahko izračunamo C_1 in C_2

$$C_1 = \int C_1' = \int \frac{-f(x)}{2\sqrt{z}} e^{-x\sqrt{z}} dx$$

$$C_2 = \int C_2' = \int \frac{f(x)}{2\sqrt{z}} e^{x\sqrt{z}} dx$$

Nedoločeni integral zamenjamo z določenimi

$$C_1 = \frac{-1}{2\sqrt{z}} \int_0^x f(\xi) e^{-\xi\sqrt{z}} d\xi + d_1 \quad (**)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^x f(\xi) e^{\xi\sqrt{z}} d\xi + d_2$$

V nadaljevanju bomo "izracunali" d_1 in d_2

s pomočjo pogoja, da je $u(x, t)$ omejena

Ker $|u(x,t)| \leq M$ za vsak x, t , ji

$$|U(x, z)| \leq \int_0^\infty |u(x, t)| e^{-zt} dt$$

$$\leq \int_0^\infty M e^{-zt} dt = \frac{M}{z}$$

Torej je tudi $U(x, z)$ omejena.

$$U(x, z) = \underbrace{C_1(x)}_{\uparrow} e^{x\sqrt{z}} + \underbrace{C_2(x)}_{\uparrow} e^{-x\sqrt{z}}$$

radi hi, da sta tudi ta dva omejena

Boishali bomo tako d_1, d_2 , da bo to res

$C_1(x) e^{x\sqrt{z}}$ omejen po x

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} C_1(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^x f(y) e^{-y\sqrt{z}} dy + d_1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^\infty f(y) e^{-y\sqrt{z}} dy + d_1 = 0$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^\infty f(y) e^{-y\sqrt{z}} dy$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^x + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^\infty$$

$$\int_0^\infty = \int_0^x + \int_x^\infty$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_x^\infty f(y) e^{-y\sqrt{z}} dy$$

$$c_1(x) e^{-x/\sqrt{z}} \text{ omegem po } x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} c_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^x f(y) e^{y/\sqrt{z}} dy + d_2 \right] = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^{-\infty} f(y) e^{y/\sqrt{z}} dy + d_2$$

$$\int_0^{-\infty} = - \int_{-\infty}^0$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^0 f(y) e^{y/\sqrt{z}} dy$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^x + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^x f(y) e^{y/\sqrt{z}} dy$$

Formuli za $c_1(x)$ in $c_2(x)$ vstavimo v

$$U(x, z) = c_1(x) e^{x/\sqrt{z}} + c_2 e^{-x/\sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_x^{\infty} f(y) e^{-y/\sqrt{z}} dy \cdot e^{x/\sqrt{z}}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^x f(y) e^{y/\sqrt{z}} \cdot e^{-x/\sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_x^{\infty} f(y) e^{(x-y)/\sqrt{z}} dy + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^x f(y) e^{(y-x)/\sqrt{z}} dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_x^{\infty} f(y) e^{-1/\sqrt{z} x - y/\sqrt{z}} dy + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^x f(y) e^{-1/\sqrt{z} x - y/\sqrt{z}} dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-|x-\xi|\sqrt{z}} d\xi (= U(x,z))$$

To je resitev transformirane enačbe

$$\text{Poznamo } U(x,z) = \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-zt} dt$$

Odtod moramo izračunati $u(x,t)$

Potrebujemo pomožno formulo

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}\right)(z) = \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$$

Vstavimo $a = |x-\xi|$

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{-|x-\xi|^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}\right)(z) = \frac{e^{-|x-\xi|\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$$

$$U(x,z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{e^{-|x-\xi|\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \mathcal{L}\left(\frac{e^{-|x-\xi|^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}\right)(z) d\xi$$

Zamenjamo integriranje po ξ in po t

$$U(x,z) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{e^{-|x-\xi|^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} d\xi\right)(z)$$

$$U(x,z) = \mathcal{L}(u(x,t))(z)$$

$$\text{Sledi } \boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{e^{-|x-\xi|^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}} d\xi}$$

• Pri reševanju toplotne enačbe na palici
potrebujemo naslednje Lapl. trans.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}\right)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(zt + \frac{a^2}{4t})} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} dt = \int_0^\infty e^{-(\sqrt{z}t - \frac{a}{2\sqrt{z}})^2 - a\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-a\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{-(\sqrt{z}t - \frac{a}{2\sqrt{z}})^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = ? \end{aligned}$$

$$\sim \Delta = \sqrt{z}t - \frac{a}{2\sqrt{z}} \quad \cdot 2\sqrt{z}$$

$$2\sqrt{z}s = 2\sqrt{z}(\sqrt{t})^2 - a$$

$$2\sqrt{z}(\sqrt{t})^2 - 2s\sqrt{t} - a = 0$$

$$\sqrt{t} = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 + 8a\sqrt{z}}}{4\sqrt{z}}$$

$$= \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 2a\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{ds}{2\sqrt{z}} \pm \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{s ds}{\sqrt{s^2 + 2a\sqrt{z}}} \quad \cdot 2$$

$$\begin{aligned} ? &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-a\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 + 2a\sqrt{z}}}\right) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi z}} e^{-a\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds \quad (\text{lahost na } \mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-a\sqrt{z}} \end{aligned}$$

V VARIACIJSKI RAČUN

•) Uvod

Variacijski račun se ukvarja z optimizacijo funkcionalov.

Kaj je funkcional?

To ni isto kot funkcija.

Funkcija slikajo iz števil v števila.

Funkcionalni slikajo iz funkcij v števila.

Preprost primer funkcionala je določen

integral $\Phi(f) = \int_a^b f(x) dx$

$$\Phi: \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Ta funkcional je linearen $\Phi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$
 $= \alpha_1 \Phi(f_1) + \alpha_2 \Phi(f_2)$.

Nas bodo zanimali tudi funkcionalni,
ki niso linearni. V naslednjem razdelku
bomo nekaj primerov nelinearnih funkcionalov,
ki so zanimivi v variacijskem računu.
(= se jih da optimizirati).

Kaj je lokalni minimum funkcionala Φ ?

To je taka funkcija f , da za vsako
"bližnjo" funkcijo $\tilde{f}$ velja $\Phi(\tilde{f}) \geq \Phi(f)$.

Radi bi uprlegali potrebni pogoji za
lokalni ekstrem.

To bomo naredili tako, da bomo prevedli
problem (iskanja ekstrema) iz funkcionalov
na funkcije.

Ideja: Vzemimo poljubno funkcijo g
in poljubno realno število t

če je t majhen, potem je funkcija tg "blizu" 0,
torej je funkcija $\tilde{f} = f + tg$ "blizu" funkcije f .

Če je f lokalni minimum za Φ , potem velja

$$\Phi(f + tg) \geq \Phi(f)$$

za vse g in vse majhne t

Definiramo funkcijo $\varphi_g(t) = \Phi(f + tg)$

za vsako g je $\varphi_g(t)$ realna funkcija
ene realne spremenljivke.

Pogoj $\Phi(t+g) \geq \Phi(t)$ za vse g in vse majhne t potem prevedemo v

$$\varphi_g(t) \geq \varphi_g(0) \text{ za vse } g \text{ in vse majhne } t.$$

To pomeni, da je $t=0$ lokalni minimum funkciji $\varphi_g(t)$.

Upoštevamo potrebni pogoj za lokalni ekstrem za običajne funkcije mi dobimo

$$\varphi'_g(0) = 0$$

To mora veljati za vsak g .

$$0 = \varphi'_g(0) \stackrel{\text{def. odvoda}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_g(t) - \varphi_g(0)}{t}$$

tej limiti
pravimo
odvod Φ
v smeri g

$$\stackrel{\text{def. } \varphi_g(t)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t+g) - \Phi(t)}{t}$$

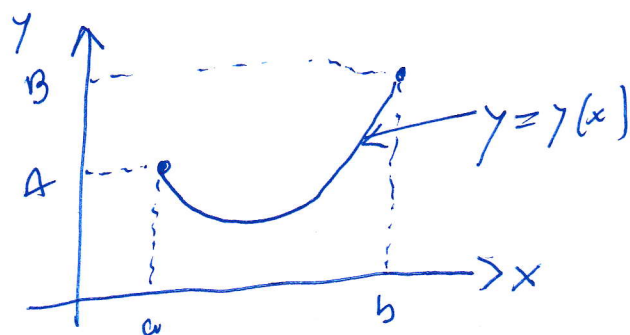
Rezultat: Izpeljali smo potrebni pogoj za lokalni ekstrem funkcionala Φ .

Če je t lokalni ekstrem funkcionala Φ , potem za vsako funkcijo g velja

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t+g) - \Phi(t)}{t} = 0$$

•) Primeri funkcionalov

1. primer: Iščimo najkrajšo krivuljo med dvema točkama v ravnini.



Dolžina krivulje $y = y(x)$ je

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \leftarrow \text{to bo naš funkcional}$$

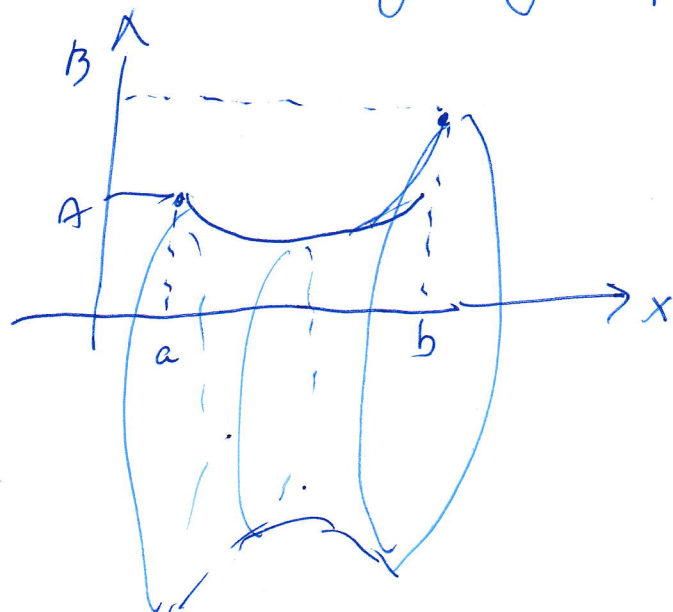
Kaj je definicijsko območje funkcionala?
Zvezo odvedljive funkcije, ki gredo
skozi točki (a, A) in (b, B)

Formalno:

$$\Phi(f) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

$$\mathcal{D}(\Phi) = \{ y \in \mathcal{C}^{(1)}[a, b] \mid y(a) = A, y(b) = B \}$$

2. primer: Iščiemo tako krivulę med dviem taškama, ki nam da pri vrtenju okrog x osi največjšo površino



Radi bi minimizirali površino te rotacijske ploskve.

Površina te ploskve je $\int_a^b 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx$

$$\Phi(y) = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx$$

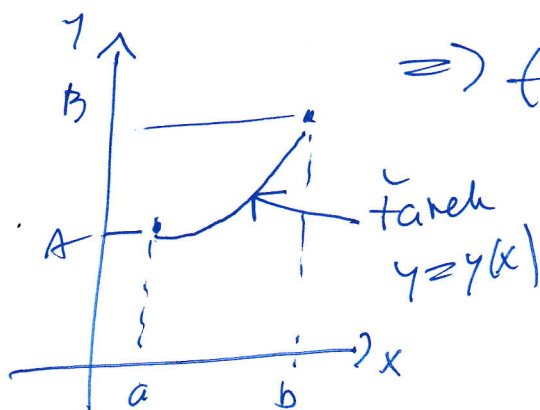
$$\mathcal{D}(\Phi) = \{ y \in C^1[a, b] \mid y(a) = A, y(b) = B \}$$

3. primer: Pot čarka v nehomogenem mediju. Hitrost svetlobe na kraju (x, y) naj bo $c(x, y)$. Iščiemo tako obliko čarka, pri kateri je čas potovanja svetlobe najkrajši.

- Izpeljava:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{c(x,y)}$$

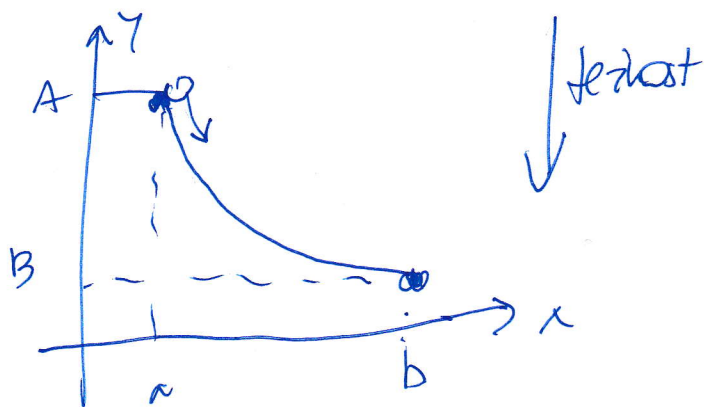
$$= \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{c(x,y)} dx$$



$$\Rightarrow t = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{c(x,y)} dx = \phi(y)$$

$\mathcal{D}(\phi) = \text{kot prej}$

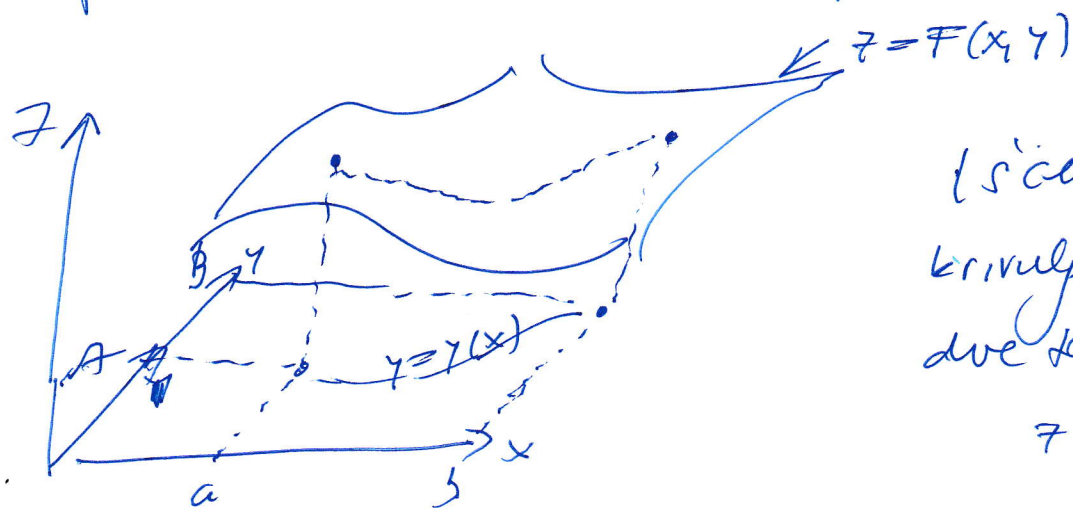
4. primer Problem brahistokrone



Iščemo tako krivuljo iz (a, A) v (b, B) ,
da bo hitrost padajoč kroglje po
tej krivulji najkrajša

V prejšnji nalogi vzamemo $c(x,y) = \sqrt{2gy}$

5. primer Geodetike na ploscvi



Iščemo najkrajšo
krivuljo, ki povezuje
dve točki na ploscvi.
 $z = F(x, y)$

Dolžina krivulje je

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$y'^2 \quad \frac{d}{dx} F(x, y(x))$$

$$\parallel$$

$$F_x + y' F_y$$

$$F_x(x, y(x))$$

$$F_y(x, y(x))$$

$$\Phi(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + (F_x + F_y y')^2} dx$$

Povzetek: V vseh primerih smo dobili

$$\Phi(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$\mathcal{K}(\Phi) = \{y \in \mathcal{C}^{(1)}[a, b] \mid y(a) = A, y(b) = B\}$$

1.) Euler-Lagrangeova enačba

Zanima nas funkcional

$$\Phi(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$\mathcal{D}(\Phi) = \{ y \in \mathcal{C}^{(1)}[a, b] \mid y(a) = A, y(b) = B \}$$

Potrebni pogoji za lokalni ekstrem tega funkcionala se glasi:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(y + th) - \Phi(y)}{t} = 0$$

za vsako funkcijo h , kjer $y + th \in \mathcal{D}(\Phi)$

Naš cilj je ta potrebni pogoji prevesti na diferencialno enačbo

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z}(x, y(x), y'(x)),$$

ki ji pravimo Euler-Lagrangeova enačba

ker $y \in \mathcal{D}(\phi)$ in $y+th \in \mathcal{D}(\phi)$,
 vega $\begin{pmatrix} y(a)=A \\ y(b)=B \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} y(a)+th(a)=A \\ y(b)+th(b)=B \end{pmatrix}$

Odtod sledi $h(a)=0$ in $h(b)=0$
 in $h \in \mathcal{C}^{(1)}[a,b]$

Potrebni pogoj za lokalni ekstrem je brez:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(y+th) - \phi(y)}{t} = 0$$

za vsak $h \in \mathcal{C}^{(1)}[a,b]$, ki zadošča $h(a)=h(b)=0$

$$\begin{aligned} \frac{\phi(y+th) - \phi(y)}{t} &= \frac{1}{t} \left[\int_a^b L(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x)) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx \right] \\ &= \int_a^b \frac{L(x, y+th, y'+th') - L(x, y, y')}{t} dx \end{aligned}$$

Limitiramo $t \rightarrow 0$ in na desni zamenjamo
 vrstni red integriranja in limitiranja:

$$\begin{aligned} (*) \quad 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(y+th) - \phi(y)}{t} = \int_a^b \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x, y+th, y'+th') - L(x, y, y')}{t} dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} L(x, y+th, y'+th') \Big|_{t=0} dx \end{aligned}$$

Uporabimo formulo za posredno odvajanje:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(x(t), y(t), y'(t)) \\ = \frac{\partial L}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial L}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial L}{\partial z} \cdot y''(t) \end{aligned}$$

V našem primeru dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(x, y+th, y'+th) \Big|_{t=0} \\ = \frac{\partial L}{\partial x} (x, y+th, y'+th) \cdot 0 \Big|_{t=0} \\ + \frac{\partial L}{\partial y} (x, y+th, y'+th) \cdot h \Big|_{t=0} \\ + \frac{\partial L}{\partial z} (x, y+th, y'+th) \cdot h' \Big|_{t=0} \\ = \frac{\partial L}{\partial y} (x, y, y') \cdot h + \frac{\partial L}{\partial z} (x, y, y') h' \end{aligned}$$

iz (*), da velja

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y} (x, y, y') h + \frac{\partial L}{\partial z} (x, y, y') h' \right] dx$$

za vsak $h \in \mathcal{C}^{(1)}[a, b]$, ki zadošča $h(a) = h(b) = 0$

Razdelimo na dva integrala in drugega obdelamo per partes.

• Drugi integral je

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_a^b \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y}}_u (x, y, y') \underbrace{h'}_{dv} dx$$

$$= \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') \cdot \underbrace{h}_{\downarrow 0} \Big|_a^b - \int_a^b h \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') dx$$

$$h(a) = h(b) = 0$$

$$0 - \int_a^b h \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') dx$$

Odat sledi

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') h + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') h' \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') h - h \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') \right] dx$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') \right] h(x)}_{M(x)} dx$$

Je dokazano, da je $M(x) \equiv 0$, potom
 smo izpeljali E.L. enačbo

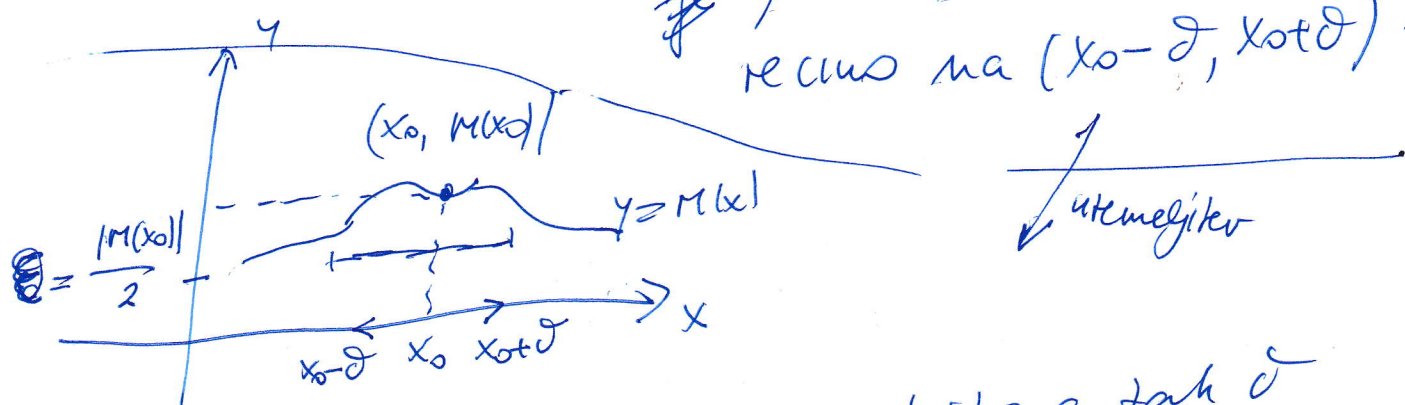
Radi bi dokazali, da iz prepostavke

$$\int_a^b M(x)h(x)dx = 0$$

(za vsak $h \in C^1[a,b]$, $h(a)=h(b)=0$)
sledi, da je $M(x) \equiv 0$ za vsak $x \in [a,b]$

Pa recimo, da obstaja tak $x_0 \in (a,b)$, da

je $M(x_0) \neq 0$. Ker je po predpostavki
 $M(x)$ zveza, ~~da~~ je $M(x) \neq 0$ (in konst. predznaka
tudi na neki okolici x_0 ,
recimo na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow$

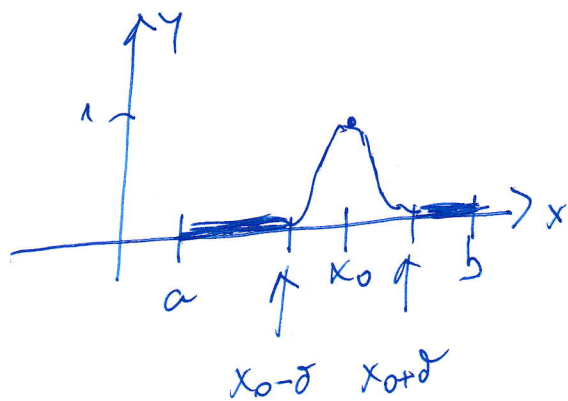


Ker je $M(x)$ zveza v x_0 , obstaja tak δ ,
da za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ velja

$$|M(x)| \in (|M(x_0)| - \varepsilon, |M(x_0)| + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow |M(x)| \geq |M(x_0)| - \varepsilon = |M(x_0)| - \frac{|M(x_0)|}{2} = \frac{|M(x_0)|}{2} = \varepsilon$$

• Za $h(x)$ vzememo funkcijo, ki je 0 raven
 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



in je strogo pozitivna
na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Potem je tudi funkcija $M(x)h(x)$
strogo pozitivna (ali strogo negativna)
na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in ničelna sicer

$$\int_a^b M(x)h(x) dx = 0$$

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \underbrace{M(x)h(x)}_{\neq 0} dx$$

Integral funkcije, ki je strogo pozitivna
in zveza na nekem intervalu, ne more
biti enak 0. To je protislovje s

predpostavko $M(x_0) \neq 0$ za nek $x_0 \in (a, b)$.

Torej smo dokazali, da je res $M(x) = 0$

Povzetek: Dokazali smo, da je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcionala

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b L(x, \gamma(x), \gamma'(x)) dx$$

$$\mathcal{Q}(\Phi) = \{ \gamma \in \mathcal{C}^{(1)}[a, b] \mid \gamma(a) = A, \gamma(b) = B \}$$

je Euler-Lagrangeova enačba

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma}(x, \gamma, \gamma') = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \gamma'}(x, \gamma, \gamma')$$

Na kratko se to enačbo napiše

$$\text{tako} \quad \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \gamma'}$$

Na dolgo se to enačbo napiše tako

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma}(x, \gamma(x), \gamma'(x)) = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \gamma'}(x, \gamma(x), \gamma'(x))$$

TO je NDE 2. reda za $\gamma(x)$

Primeri prihodnjic

Opomba: Če funkcija $L(x, y, y')$ ni odvisna od x ali ni odvisna od y , potem se enačba poenostavi.

Recimo če je $L(x, y, y') = L(y, y')$,

potem velja

$$\frac{d}{dx} \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} L - y'' \frac{\partial L}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'}$$

$$= y' \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$$

po E.L. je 0

Ostane $\frac{d}{dx} \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$

Torej je $\underbrace{L - y' \frac{\partial L}{\partial y'}}_{\text{NDE 1. reda}} = \text{Const}$