

Poglavje 4

Parcialne diferencialne enačbe 1. reda

4.1 Odvisnost funkcij

Definicija 4.1 Imejmo m funkcij $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, ki so definirane in zvezno odvedljive na območju

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Pravimo, da so te funkcije v Ω odvisne, če eksistira netrivialna zvezno odvedljiva funkcija $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, taka, da je za $\mathbf{x} \in \Omega$

$$F[\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})] = 0. \quad (4.1)$$

Primer 4.1 Funkcije φ_1, φ_2 in φ_3 ,

$$\varphi_1(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$\varphi_2(x, y) = xy,$$

$$\varphi_3(x, y) = x + y$$

so v $\mathbb{R}^2$ odvisne, ker je

$$\varphi_1(x, y) + 2\varphi_2(x, y) - \varphi_3^2(x, y) = 0.$$

▲

Izrek 4.1 Funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ so v Ω odvisne natanko takrat, ko je rang Jacobijeve matrike

$$\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right]_{k=j=1}^{k=m, j=n}$$

v Ω manjši od m .

Dokaz. Naj bodo funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ odvisne v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in

$$F[\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})] = 0$$

za $\mathbf{x} \in \Omega$. Tedaj je

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial F(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Ker je $F \not\equiv 0$, je vsaj en odvod $\frac{\partial F(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial \varphi_k}$ različen od nič, sistem (4.2) za odvode $\frac{\partial F(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial \varphi_k}$ ima netrivialno rešitev, rang Jacobijeve matrike mora biti manjši od m .

Obratno, če je rang Jacobijeve matrike enak r , $0 < r < m$, po potrebi preuredimo odvisne in neodvisne spremenljivke tako, da bo

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \neq 0, \quad (4.3)$$

vse večje poddeterminante pa so enake nič. Zaradi (4.3) lahko po eksistenčnem izreku za implicitne funkcije iz enačb

$$y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, r$$

izračunamo

$$x_j = \psi_j(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, r$$

in to vstavimo v φ_{r+p} , $p > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_{r+p}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \varphi_{r+p}[\psi_1(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, \\ &\quad \psi_r(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n] =: \\ &=: \psi_{r+p}(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Pokažimo, da so funkcije ψ_{r+p} neodvisne od spremenljivk x_{r+q} , $q > 0$! Determinanto

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+p})}{\partial(x_1, \dots, x_r, x_{r+q})} = 0$$

razvijemo v obliko

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \sum_{j=1}^r \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} & \sum_{j=1}^r \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+q}} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+q}} & \sum_{j=1}^r \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{r+q}} + \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial x_{r+q}} \end{vmatrix} = 0.$$

Od zadnjega stolpca odštejemo stolpce j , $j = 1, \dots, r$, pomnožene z

$$\frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial y_j}$$

in rezultat razvijemo po zadnjem stolpcu, da dobimo

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \frac{\partial\psi_{r+p}}{\partial x_{r+q}} = 0.$$

Ker prvi faktor ni nič, je

$$\frac{\partial\psi_{r+p}}{\partial x_{r+q}} = 0, \quad p, q > 0,$$

torej so funkcije ψ_{r+p} odvisne le od $y_1, \dots, y_r$. ■

4.2 Parcialne diferencialne enačbe

Kadar imamo diferencialno enačbo za iskano funkcijo večih spremenljivk, tedaj v enačbi nastopajo parcialni odvodi. Tako enačbo imenujemo *parcialna diferencialna enačba* (PDE). Kot običajno, red najvišjega odvoda imenujemo *red PDE*.

Splošna PDE prvega reda za funkcijo u treh spremenljivk, x, y in z , ima obliko

$$F\left[x, y, z, u(x, y, z), \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}\right] = 0.$$

Splošna PDE drugega reda za funkcijo u dveh spremenljivk, x in y , ima obliko

$$F\left[x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right] = 0.$$

Do navadne diferencialne enačbe (NDE) *lahko* pridemo tako, da iz enačbe za družino funkcij eliminiramo poljubne elemente – konstante. Podobno *lahko* teče pot pri PDE.

Primer 4.2 Poiščimo PDE, ki ji zadoščajo enačbe vseh sfer v (x, y, z) prostoru in ki imajo središče na osi z :

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = r^2, \quad a = \text{const}, \quad r = \text{const}.$$

Če to enačbo razrešimo na z , $z = u(x, y)$, sledi

$$\begin{aligned} x + [u(x, y) - a] \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= 0, \\ y + [u(x, y) - a] \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

in od tod

$$y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (4.4)$$

▲

Primer 4.3 Poiščimo PDE, ki ji zadoščajo enačbe vseh stožcev v (x, y, z) prostoru, ki se jim rotacijska os ujema z osjo z :

$$x^2 + y^2 = a^2(z - b)^2, \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}.$$

Če to enačbo razrešimo na z , $z = u(x, y)$, sledi

$$\begin{aligned} x &= a^2[u(x, y) - b] \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \\ y &= a^2[u(x, y) - b] \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

in od tod

$$y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0,$$

torej spet enačba (4.4).

Rešitve enačbe (4.4) so, med drugim, enačbe vseh sfer s središčem na osi z , in vseh stožcev z osjo z . Kaj imajo skupnega? Oboji so *rotacijske ploskve*. Splošna rotacijska ploskev, ki ima os z za simetrijsko os, ima enačbo

$$z = u(x, y) = w(x^2 + y^2),$$

kjer je $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna (gladka) funkcija. Sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= 2xw'(x^2 + y^2), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= 2yw'(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

in

$$y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0.$$

torej spet ista PDE (4.4). Njena rešitev je torej enačba vseh *rotacijskih ploskev*, ki imajo os z za rotacijsko os.

To nam dá misliti, da tudi rešitve PDE vsebujejo poljubne elemente, le da to niso *konstante* ampak *funkcije*.

Domnevo podprimo še z nekaj primeri!

Primer 4.4 Naj bo $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija. Potem sledi

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w(xy), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= yw'(xy), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= xw'(xy), \\ x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$



Primer 4.5 Vzemimo splošno enoparametrično družino ravnin

$$z = u(x, y) = \alpha x + w(\alpha)y + v(\alpha),$$

kjer sta w in v poljubni gladki funkciji in α poljubna konstanta. Ogrinjačo take družine ravnin imenujemo *razvojna ploskev*.

Ogrinjačo družine

$$F(x, y, z, \alpha) = 0$$

dobimo, kot vemo, tako, da iz te enačbe in iz enačbe

$$\frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

eliminiramo α . V našem primeru je treba α eliminirati iz enačb

$$z = u(x, y) = \alpha x + w(\alpha)y + v(\alpha), \quad (4.5)$$

$$0 = x + w'(\alpha)y + v'(\alpha). \quad (4.6)$$

Če od tu eliminiramo α , dobimo enačbo razvojne ploskve, ki vsebuje funkciji w in v na zelo zamotan način.

Namesto tega najprej eliminirajmo funkcijo v tako, da enačbo (4.5) odvajamo na x in na y

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \alpha, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= w(\alpha). \end{aligned}$$

Iz teh dveh enačb eliminirajmo α

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = w \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right].$$

Z dodatnim odvajanjem eliminiramo še funkcijo w

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} &= w' \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= w' \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

ali

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \right]^2.$$

Tej enačbi zadoščajo vse razvojne ploskve.

▲

Primer 4.6 Funkcija $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se imenuje *homogena funkcija* stopnje α , če za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja

$$u(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^\alpha u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Izberimo $t = \frac{1}{x_n}$ in dobimo

$$\begin{aligned} w\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) &:= u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right) = \\ &= x_n^{-\alpha} u(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Homogene funkcije n spremenljivk se torej izražajo s poljubno (gladko) funkcijo $n-1$ kvocientov $x_1/x_n, x_2/x_n, \dots, x_{n-1}/x_n$.

Imejmo torej družino

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n^\alpha w\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

kjer je α parameter in $w : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija. Eliminirajmo jo! Označimo

$$z_k = \frac{x_k}{x_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

in sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} &= x_n^\alpha \frac{\partial w(z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial z_k} \frac{1}{x_n}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} &= \alpha x_n^{\alpha-1} w(z_1, \dots, z_{n-1}) - x_n^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial w(z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial z_k} \frac{x_k}{x_n^2} = \\ &= \alpha x_n^{\alpha-1} w(z_1, \dots, z_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{x_n} \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

ali

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \alpha u(x_1, \dots, x_n). \quad (4.7)$$

Enačbo (4.7) imenujemo *Eulerjev homogenitetni pogoj*.

▲

V vseh primerih je družina z n poljubnimi glatkimi funkcijami $m-1$ spremenljivk privedla do PDE reda n za funkcijo m spremenljivk. Domnevamo, da velja tudi obratno:

Domneva 4.1 PDE reda n v m spremenljivkah ima za splošno rešitev funkcijo, ki vsebuje n poljubnih gladih funkcij $m-1$ spremenljivk.

Primer 4.7 Navadno diferencialno enačbo reda n

$$F[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$$

lahko tolmačimo kot PDE za $m = 1$ spremenljivko. Vemo, da ima taka enačba splošno rešitev, ki je odvisna od n poljubnih konstant, to je od n poljubnih funkcij $m - 1 = 0$ spremenljivk.

▲

Primer 4.8

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Očitna rešitev je

$$u(x, y) = w(y), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

Primer 4.9

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = 0.$$

Očitna rešitev je

$$u(x, y, z) = w(y, z), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

Primer 4.10

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Sledi

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = w_0(x), \quad w_0 \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

Dalje sledi

$$u(x, y) = \int w_0(x) dx + v(y),$$

ali

$$u(x, y) = w(x) + v(y), \quad w, v \text{ poljubni gladki funkciji.}$$

▲

Primer 4.11

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \quad (4.8)$$

Uvedemo novi neodvisni spremenljivki

$$\begin{aligned} x + y &= \xi, \\ x - y &= \eta, \\ u(x, y) &= v(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Torej enačba (4.8) preide v enačbo

$$2 \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0$$

in od tod

$$u(x, y) = v(\xi, \eta) = w(\xi) = w(x + y), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

Primer 4.12 Naj bo g dana funkcija in u iskana funkcija v enačbi

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0,$$

ali

$$\frac{\partial(g, u)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Po izreku 4.1 sta funkciji g in u odvisni, torej je

$$u(x, y) = w[g(x, y)],$$

kjer je $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija.

4.2.1 Homogena linearna PDE prvega reda

Dane naj bodo primerne funkcije $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ali na kratko, *vektorsko polje* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$. *Homogeno linearno PDE prvega reda*

$$f_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0$$

za funkcijo u lahko zapišemo tudi v obliki

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } u(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.9)$$

Če je funkcija u rešitev enačbe (4.9) in če vzamemo ploskev z enačbo

$$u(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad (4.10)$$

ima normala na ploskev smer $\text{grad } u(\mathbf{x})$, enačba (4.9) pa pove, da je normala na ploskev (4.10) pravokotna na polje $\mathbf{f}$, kar pomeni, da se ploskev (4.10) v vsaki točki dotika polja $\mathbf{f}$.

Poiščimo *tirnice*, (tudi *trajektorije*), vektorskega polja $\mathbf{f}$, to je, krivulje, ki se v vsaki točki dotikajo polja $\mathbf{f}$. Če je

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$

parametrična enačba tirnice, mora veljati

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]. \quad (4.11)$$

Enačba¹ (4.11), napisana po komponentah, se glasi

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1[x_1(t), \dots, x_n(t)], \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n[x_1(t), \dots, x_n(t)]. \end{aligned}$$

To je *avtonomen sistem* NDE, ki ga lahko napišemo brez parametra

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n}. \quad (4.12)$$

Če izberemo, na primer, x_n za neodvisno spremenljivko, dobimo sistem $n - 1$ navadnih diferencialnih enačb

$$\frac{dx_k(x_n)}{dx_n} = \frac{f_k(x_1, \dots, x_n)}{f_n(x_1, \dots, x_n)}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (4.13)$$

Izrek 4.2 Naj bo vektorsko polje $\mathbf{f}$ gladko in ne enako nič. Avtonomni sistem (4.11) ima tedaj $n - 1$ neodvisnih integralov $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$.

Dokaz. Po pogojih izreka obstaja točka $\mathbf{x}_0$, da je v neki njeni okolici $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$. Po potrebi premešamo komponente, da bo v tej okolici $f_n(\mathbf{x}) \neq 0$. Po eksistenčnem izreku za sistem navadnih diferencialnih enačb, glej [24], ima potem sistem (4.13) pri začetnih pogojih

$$x_k(x_n^{(0)}) = x_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1$$

¹V resnici bi morali pisati, da je vektor $\dot{\mathbf{x}}$ sorazmeren vektorju $\mathbf{f}$, vendar se sorazmernostne konstante lahko znebimo s primerno izbiro parametra t .

natanko eno rešitev

$$x_k = g_k(x_n, x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.14)$$

v okolici točke $x_n^{(0)}$. Sistem (4.14) sedaj razrešimo na $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}$. To gre, če je

$$J(x_n) := \frac{\partial(g_1, \dots, g_{n-1})}{\partial(x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)})} \neq 0$$

v okolici točke $x_n^{(0)}$. To pa zagotovo drži, saj je rešitev (4.14) zvezno odvisna od začetnih pogojev in je

$$J(x_n^{(0)}) = 1.$$

Iz enačb (4.14) torej dobimo

$$x_k^{(0)} = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.15)$$

Avtonomni sistem (4.11) ima tako zagotovo $n-1$ integralov φ_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$. Ti integrali so neodvisni. Če bi bili odvisni, bi za neko netrivialno funkcijo F veljalo

$$F[\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)] = F(x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) = 0,$$

to pa zagotovo ni res, saj je točka x_0 poljubna. ■

Definicija 4.2 Sistem (4.11) imenujemo karakteristični sistem enačbe (4.9), tirnice pa imenujemo karakteristike.

Izrek 4.3 Skalarno polje $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je integral sistema (4.11)

$$\dot{x}(t) = f[x(t)]$$

natanko takrat, ko reši enačbo (4.9).

Dokaz. Naj bo u poljuben integral sistema (4.11). Na njem velja

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} u[x(t)] = \\ &= \text{grad } u(x) \cdot \dot{x}(t) = \\ &= \text{grad } u(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

in vidimo, da vsak integral sistema (4.11) reši enačbo (4.9).

Obratno, če funkcija u reši enačbo (4.9), je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u[x(t)] &= \text{grad } u(x) \cdot \dot{x}(t) = \\ &= \text{grad } u(x) \cdot f(x) = 0 \end{aligned}$$

in je u integral sistema (4.11). ■

Izrek 4.4 Funkcija u je rešitev enačbe (4.9) natanko takrat, ko je

$$u = w(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \quad (4.16)$$

kjer so $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ neodvisni integrali karakterističnega sistema (4.11).

Dokaz. Naj bo $w : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija in $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ neodvisni integrali sistema (4.11). Tedaj je tudi φ

$$\varphi(\mathbf{x}) = w[\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\mathbf{x})]$$

integral sistema (4.11), saj na tiru velja

$$\frac{d}{dt} \varphi[\mathbf{x}(t)] = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial w(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial \varphi_k} \frac{d}{dt} \varphi_k[\mathbf{x}(t)] = 0.$$

Če so $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ neodvisni integrali karakterističnega sistema, je po ravnokar dokazanem funkcija u v enačbi (4.16) tudi, po izreku 4.3 pa potem funkcija u reši enačbo (4.9). Obratno, če je funkcija u rešitev enačbe (4.9), tedaj je tudi integral karakterističnega sistema po izreku 4.3 in imamo n integralov

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, u.$$

Zanje velja

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \text{grad } \varphi_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \mathbf{f} \cdot \text{grad } u &= 0. \end{aligned}$$

To je homogen sistem linearnih (algebraičnih) enačb za netrivialen vektor $\mathbf{f}$, zato mora biti

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, u)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 0.$$

Po izreku 4.1 so potem funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, u$ odvisne, in ker so funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ neodvisne, velja (4.16). ■

Primer 4.13 Enačba

$$xu_x(x, y) - yu_y(x, y) = 0. \quad (4.17)$$

Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t), \\ \dot{y}(t) &= -y(t), \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)y(t) + x(t)\dot{y}(t) &= 0, \\ [x(t)y(t)]' &= 0, \\ x(t)y(t) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Rešitev enačbe (4.17) je

$$u(x, y) = w(xy), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$



Primer 4.14 Enačba

$$yu_x(x, y) - xu_y(x, y) = 0. \quad (4.18)$$

Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t), \\ \dot{y}(t) &= -x(t), \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) &= 0, \\ x^2(t) + y^2(t) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Rešitev enačbe (4.18) je

$$u(x, y) = w(x^2 + y^2), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$



Primer 4.15 Naj bo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \text{grad } u(\mathbf{x}) &= 0, \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Karakteristični sistem je

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$$

in rešitev

$$\mathbf{x}(t) = Ce^t,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{z(t)} &= \text{const}, \\ \frac{y(t)}{z(t)} &= \text{const}. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe (4.19) je

$$u(x, y) = w\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$



Primer 4.16 Naj bo

$$[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \text{grad } u(\mathbf{x})] = 0, \quad \mathbf{a} = \text{const.} \quad (4.20)$$

Karakteristični sistem je

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}(t),$$

kjer je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ mešani produkt vektorjev $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$, od koder sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) &= 0, \\ \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) &= 0, \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t)|^2 &= \text{const}, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}(t) &= \text{const}. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe (4.20) je

$$u(\mathbf{x}, y) = w(|\mathbf{x}|^2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.} \quad \blacktriangle$$

4.2.2 Kvazilinearna enačba prvega reda

Kvazilinearna enačba je enačba, ki je linearna v najvišjih odvodih, ne pa nujno v nižjih odvodih. Kvazilinearna enačba prvega reda za funkcijo

$$x_{n+1} = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ima torej obliko

$$\sum_{k=1}^n f_k(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} = f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}). \quad (4.21)$$

Denimo, da imamo rešitev enačbe (4.21) v implicitni obliki

$$v(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0, \quad \frac{\partial v(x_1, \dots, x_{n+1})}{\partial u} \neq 0. \quad (4.22)$$

Z odvajanjem dobimo

$$\frac{\partial v(x_1, \dots, x_{n+1})}{\partial x_k} + \frac{\partial v(x_1, \dots, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Če sedaj enačbo (4.21) pomnožimo z $-\frac{\partial v(x_1, \dots, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}}$, dobimo

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial v(x_1, \dots, x_{n+1})}{\partial x_k} = 0. \quad (4.23)$$

To je homogena linearna enačba za funkcijo $v : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Obratno, če je v rešitev enačbe (4.23), odvisna od x_{n+1} , lahko iz enačbe

$$v(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \quad (4.24)$$

izračunamo

$$x_{n+1} = u(x_1, \dots, x_n). \quad (4.25)$$

Hitro se lahko prepričamo, da funkcija u iz enačbe (4.25) reši enačbo (4.21).

V nadaljevanju bomo uporabljali oznake

$$\begin{aligned} p &= u_x, \\ q &= u_y, \end{aligned}$$

kjer je implicitno privzeto, da je $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Primer 4.17 Enačbi

$$x^2 p + y^2 q = (x + y)z$$

za funkcijo $z = u(x, y)$ pripada karakteristični sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t), \\ \dot{y}(t) &= y^2(t), \\ \dot{z}(t) &= [x(t) + y(t)]z(t). \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} - \frac{\dot{y}(t)}{y^2(t)} &= 0, \\ \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{y(t)} &= \text{const}, \\ \varphi_1(x, y, z) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= x^2(t) - y^2(t) = \\ &= [x(t) - y(t)][x(t) + y(t)] = \\ &= [x(t) - y(t)] \frac{\dot{z}(t)}{z(t)}, \\ \frac{[x(t) - y(t)]}{x(t) - y(t)} - \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} &= 0, \\ \frac{z(t)}{x(t) - y(t)} &= \text{const}, \\ \varphi_2(x, y, z) &= \frac{z}{x - y}. \end{aligned}$$

Rešitev v implicitni obliki je

$$v\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{z}{x-y}\right) = 0,$$

ali

$$z = u(x, y) = (x - y)w\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right),$$

kjer je w poljubna gladka funkcija. ▲

Primer 4.18 Enačbi

$$z(xp - yq) = y^2 - x^2$$

za funkcijo $z = u(x, y)$ pripada karakteristični sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= z(t)x(t), \\ \dot{y}(t) &= -z(t)y(t), \\ \dot{z}(t) &= y^2(t) - x^2(t).\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} + \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} &= 0, \\ x(t)y(t) &= \text{const}, \\ \varphi_1(x, y, z) &= xy\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= z(t)[x(t) - y(t)], \\ [x(t) + y(t)][\dot{x}(t) + \dot{y}(t)] &= z(t)[x^2(t) - y^2(t)], \\ [x(t) + y(t)][\dot{x}(t) + \dot{y}(t)] &= -z(t)\dot{z}(t), \\ [x(t) + y(t)]^2 + z^2(t) &= \text{const}, \\ \varphi_2(x, y, z) &= (x + y)^2 + z^2.\end{aligned}$$

Rešitev v implicitni obliki je

$$v[xy, (x + y)^2 + z^2] = 0,$$

ali

$$z = u(x, y) = \sqrt{w(xy) - (x + y)^2},$$

kjer w poljubna gladka funkcija. ▲

Primer 4.19 (Ortogonalne ploskve.) Imejmo enoparametrično družino ploskev

$$f(x, y, z) = \text{const.} \quad (4.26)$$

Poiščimo ploskve, ki pravokotno sekajo ploskve družine (4.26).

Naj bo enačba iskanih ploskev $z = u(x, y)$. Normali na obe družini morati biti pravokotni druga na drugo:

$$p \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + q \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}. \quad (4.27)$$

To je kvazilinerna enačba prvega reda.

Za vzorec družine (4.26) vzemimo družino

$$\frac{z(x+y)}{3z+1} = \text{const.}$$

Enačba (4.27) se glasi

$$\frac{z}{3z+1}p + \frac{z}{3z+1}q = (x+y) \frac{3z+1-3z}{(3z+1)^2},$$

ali

$$zp + zq = \frac{x+y}{3z+1}.$$

Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= z(t), \\ \dot{y}(t) &= z(t), \\ \dot{z}(t) &= \frac{x(t) + y(t)}{3z(t) + 1}. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 0, \\ x(t) - y(t) &= \text{const}, \\ \varphi_1(x, y, z) &= x - y \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) &= z(t)[x(t) + y(t)], \\ x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) &= z(t)[3z(t) + 1]\dot{z}(t), \\ x^2(t) + y^2(t) - 2z^3(t) - z^2(t) &= \text{const}, \\ \varphi_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2. \end{aligned}$$

Splošna rešitev v implicitni obliki je

$$x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = w(x - y),$$

kjer je w poljubna gladka funkcija.

▲

4.3 Cauchyjeva naloga

Cauchyjeva naloga sprašuje po tisti rešitvi parcialne diferencialne enačbe, ki gre skozi dano krivuljo. Podrobneje si oglejmo tridimenzionalni primer. Iščemo tako rešitev $z = u(x, y)$ kvazilinearne enačbe prvega reda, ki poteka skozi krivuljo

$$F(x, y, z) = 0, \quad (4.28)$$

$$G(x, y, z) = 0. \quad (4.29)$$

Vemo, da dobimo splošno rešitev iz enačbe

$$w(\varphi, \psi) = 0, \quad (4.30)$$

kjer je w poljubna gladka funkcija, φ in ψ pa dva neodvisna integrala karakterističnega sistema

$$\varphi = \varphi(x, y, z), \quad (4.31)$$

$$\psi = \psi(x, y, z). \quad (4.32)$$

Sklepamo takole. Količine x, y, z, φ in ψ so povsod povezane z enačbama (4.31) in (4.32), na začetni krivulji pa še z enačbama (4.28) in (4.29). Iz teh štirih enačb eliminiramo x, y in z pa nam ostane zveza med φ in ψ . To je iskana funkcija w .

Primer 4.20 Poiščimo enačbo ploskve, ki seka ploskve z enačbo

$$\frac{z(x+y)}{3z+1} = \text{const}$$

pravokotno, in gre skozi krožnico

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Neodvisna integrala smo našli v primeru 4.19 na strani 152.

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= x - y, \\ \psi(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2. \end{aligned}$$

Eliminacija nam dá

$$\psi = -2,$$

torej je rešitev v implicitni obliki

$$x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 + 2 = 0.$$

▲

Primer 4.21 (Model telefonske centrale.) Napravimo naslednje predpostavke o modelu telefonske centrale.

- (i) V času $(t, t + \delta t)$ se pojavi nov pogovor z verjetnostjo $\lambda\delta t + o(\delta t)$.
- (ii) Pogovor na zasedeni liniji se v času $(t, t + \delta t)$ konča z verjetnostjo $n\mu\delta t + o(\delta t)$, če je zasedenih n linij.
- (iii) Verjetnost za dva taka dogodka v času $(t, t + \delta t)$ je $o(\delta t)$.

Naj bo $P_n(t)$ verjetnost, da je ob času t zasedenih n linij. Pri $n \geq 1$ velja

$$P_n(t + \delta t) = \lambda\delta t P_{n-1}(t) + \mu(n+1)\delta t P_{n+1}(t) + (1 - \lambda\delta t - \mu n\delta t)P_n(t) + o(\delta t),$$

ali

$$\frac{P_n(t + \delta t) - P_n(t)}{\delta t} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu n)P_n(t) + \frac{o(\delta t)}{\delta t}.$$

Pri $n = 0$ na isti način dobimo

$$\frac{P_0(t + \delta t) - P_0(t)}{\delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) + \frac{o(\delta t)}{\delta t}.$$

V limiti $\delta t \rightarrow 0$ sledi

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu n)P_n(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t), \quad n \geq 0, \\ P_{-1}(t) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sistem diferencialnih enačb (4.33) bomo rešili z uporabo *rodovne funkcije*. Naj bo

$$u(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n.$$

Enačbe (4.33) pomnožimo z z^n in jih seštejemo. Dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t) z^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n - \\ &\quad - \mu \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(t) z^n, \\ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n &= \lambda z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n - \\ &\quad - \mu z \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n + \mu \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) z^n, \\ \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} &= \lambda z u(t, z) - \lambda u(t, z) - \mu z \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} + \mu \frac{\partial u(t, z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

ali

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial t} + \mu(z-1) \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} = \lambda(z-1)u(t, z).$$

Ker se naši neodvisni spremenljivki imenujeta t in z , bomo parameter karakterističnega sistema imenovali τ . Karakteristični sistem se potem glasi

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = 1, \quad (4.34)$$

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = \mu [z(\tau) - 1], \quad (4.35)$$

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = \lambda [z(\tau) - 1] u(\tau). \quad (4.36)$$

Z deljenjem enačb (4.35) in (4.34) dobimo

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z-1} &= \mu dt, \\ \log(z-1) &= \log C_1 + \mu t, \\ z-1 &= C_1 e^{\mu t}, \\ (z-1)e^{-\mu t} &= C_1, \\ \varphi(t, z, u) &= (z-1)e^{-\mu t}, \end{aligned}$$

z deljenjem enačb (4.36) in (4.34) pa

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= \lambda(z-1) dt = \\ &= \lambda C_1 e^{\mu t} dt, \\ \log u &= \frac{\lambda}{\mu} C_1 e^{\mu t} + \log C_2 = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (z-1) + \log C_2, \\ u &= C_2 \exp \left[\frac{\lambda}{\mu} (z-1) \right], \\ \psi(t, z, u) &= u \exp \left[-\frac{\lambda}{\mu} (z-1) \right] \end{aligned}$$

in od tod

$$u(t, z) = \exp \left[\frac{\lambda}{\mu} (z-1) \right] w[(z-1)e^{-\mu t}],$$

kjer je w poljubna gladka funkcija.

Denimo, da imamo ob času $t = 0$ zasedenih m linij:

$$P_k(0) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}.$$

Zato velja

$$u(0, z) = z^m.$$

Iz enačb

$$\begin{aligned}\varphi &= (z-1)e^{-\mu t}, \\ \psi &= u \exp \left[-\frac{\lambda}{\mu}(z-1) \right], \\ t &= 0, \\ u &= z^m\end{aligned}$$

moramo eliminirati t , z in u . Najprej upoštevamo zadnji dve enačbi in dobimo

$$\begin{aligned}\varphi &= z-1, \\ \psi &= z^m \exp \left(-\frac{\lambda\varphi}{\mu} \right) = \\ &= (1+\varphi)^m \exp \left(-\frac{\lambda\varphi}{\mu} \right)\end{aligned}$$

ter

$$u \exp \left[-\frac{\lambda}{\mu}(z-1) \right] = [1+(z-1)e^{-\mu t}]^m \exp \left[-\frac{\lambda}{\mu}(z-1)e^{-\mu t} \right]$$

in končno

$$u(t, z) = [1+(z-1)e^{-\mu t}]^m \exp \left[\frac{\lambda}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t}) \right].$$

Izračunajmo povprečno število pogovorov ob času t !

$$\begin{aligned}E(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = \\ &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1} \right]_{z=1} = \\ &= \left[\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \right]_{z=1} = \\ &= me^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}).\end{aligned}$$

▲

4.4 Cauchyjev pristop

Cauchy je reševal nalogo, ki nosi po njem ime, drugače. Njegova pot ima to prednost, da meče luč na rešljivost te naloge.

Izrek 4.5 Vsaka rešitev kvazilinearne PDE (4.21) je sestavljena iz karakteristik.

Dokaz. Denimo, da ima karakteristika, rešitev karakterističnega sistema,

$$\begin{aligned}x_k &= x_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\u &= u(t),\end{aligned}$$

eno točko skupno z rešitvijo

$$u = v(x_1, \dots, x_n)$$

in si oglejmo funkcijo g

$$g(t) = v[x_1(t), \dots, x_n(t)] - u(t).$$

Ker je funkcija v rešitev enačbe (4.21), velja

$$\begin{aligned}\dot{g}(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} \dot{x}_k - \dot{u} = \\&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} f_k - f_{n+1} = 0,\end{aligned}$$

torej je $g(t) = \text{const.}$ Tam, kjer karakteristika prebode rešitev, je $g(t) = 0$, torej je $g(t) \equiv 0$ in karakteristika leži vsa na ploskvi. Izrek je dokazan, ker lahko skozi vsako točko rešitve potegnemo karakteristiko. ■

Vzemimo enačbo

$$Pp + Qq = R, \quad (4.37)$$

kjer so P , Q in R dane funkcije spremenljivk x , y in u . Rešitev naj poteka skozi krivuljo, podano z enačbami

$$\begin{aligned}x &= \xi(s), \\y &= \eta(s), \\u &= \zeta(s).\end{aligned} \quad (4.38)$$

Skozi vsako točko krivulje (4.38) potegnemo karakteristiko, to je, enačbe (4.38) vzamemo za začetne pogoje karakterističnega sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P, \\\dot{y} &= Q, \\\dot{u} &= R.\end{aligned} \quad (4.39)$$

Dobimo

$$\begin{aligned}x &= x(t, s), \\y &= y(t, s), \\u &= u(t, s).\end{aligned} \quad (4.40)$$

To je parametrična izražava neke ploskve. Enačbo te ploskve dobimo v eksplisitni obliki, če lahko iz prvih dveh enačb (4.40) izrazimo

$$\begin{aligned}t &= t(x, y), \\s &= s(x, y)\end{aligned} \quad (4.41)$$

in to vstavimo v tretjo enačbo (4.40).

Izražava (4.41) se zagotovo posreči, če je

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} &= x \frac{\partial y}{\partial s} - y \frac{\partial x}{\partial s} = \\ &= P \frac{\partial y}{\partial s} - Q \frac{\partial x}{\partial s} \neq 0.\end{aligned}$$

Ta pogoj mora biti izpolnjen tudi na začetni krivulji (4.38)

$$\Delta := P \frac{d\eta}{ds} - Q \frac{d\xi}{ds} \neq 0. \quad (4.42)$$

Če je vzdolž začetne krivulje (4.38) pogoj (4.42) izpolnjen, je Cauchyjeva naloga enolično rešljiva.

Denimo, da je vzdolž začetne krivulje $\Delta = 0$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{ds} &= \lambda P, \\ \frac{d\eta}{ds} &= \lambda Q.\end{aligned}$$

Če je še

$$\frac{d\zeta}{ds} = \lambda R,$$

je začetna krivulja že kar karakteristika. V takem primeru si izberemo poljubno krivuljo, ki ni karakteristika, a seka dano krivuljo, in poiščemo rešitev, ki poteka skozi novo krivuljo. Ta rešitev poteka tudi skozi prvotno krivuljo, saj poteka skozi eno njeno točko, (presečišče), krivulja pa je karakteristika. Tako smo dokazali

Izrek 4.6 Če je vzdolž začetne krivulje $\Delta \neq 0$, je Cauchyjeva naloga enolično rešljiva. Če je vzdolž začetne krivulje $\Delta = 0$, naloga nima rešitve, ali pa je rešitev brez števila. (Če je $\Delta = 0$ v posameznih točkah, so težave z zveznostjo).

Mimogrede smo ugotovili, da se vzdolž karakteristike različne rešitve sekajo.

Izrek 4.7 Krivulja, vzdolž katere se dve rešitvi kvazilinearne parcialne diferencialne enačbe sekata, je karakteristika.

Dokaz. Tu je dokaz za tri dimenzije. Enačba $Pp + Qq = R$ pove, da je normala na rešitev,

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -1 \end{bmatrix},$$

pravokotna na polje

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}.$$

Tam, kjer se dve rešitvi sekata, sta obe pravokotni na polje $\mathbf{F}$, zato je polje $\mathbf{F}$ usmerjeno vzdolž tangente na presečno krivuljo, ki zato zadošča enačbi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}.$$

To pa je ravno karakteristični sistem in presečna krivulja je karakteristika. ■

Primer 4.22 Enačbi

$$pu + q = 1$$

pripada karakteristični sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= 1, \\ \dot{u} &= 1\end{aligned}$$

z rešitvijo

$$\begin{aligned}y &= y_0 + t, \\ u &= u_0 + t, \\ x &= x_0 + u_0 t + \frac{1}{2}t^2,\end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned}x(t, s) &= \xi(s) + \zeta(s)t + \frac{1}{2}t^2, \\ y(t, s) &= \eta(s) + t, \\ u(t, s) &= \zeta(s) + t\end{aligned}$$

in je

$$\Delta(s) = \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \frac{d\xi(s)}{ds}.$$

Oglejmo si štiri primere.

(i)

$$\begin{aligned}\xi(s) &= s, \\ \eta(s) &= 1, \\ \zeta(s) &= 0.\end{aligned}$$

Sledi

$$\Delta(s) = -1$$

in

$$\begin{aligned}x &= s + \frac{1}{2}t^2, \\y &= 1 + t, \\u &= t.\end{aligned}$$

Če eliminiramo s in t , dobimo

$$u = y - 1.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \frac{1}{2}s^2, \\ \eta(s) &= s, \\ \zeta(s) &= s.\end{aligned}$$

Sledi

$$\Delta(s) = 0$$

in začetna krivulja je karakteristika:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}s^2 + st + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(s+t)^2, \\ y &= s+t, \\ u &= s+t.\end{aligned}$$

Sledi

$$u = y + w\left(x - \frac{1}{2}y^2\right),$$

kjer je w poljubna gladka funkcija, ki zadošča pogoju

$$w(0) = 0.$$

(iii)

$$\begin{aligned}\xi(s) &= 1, \\ \eta(s) &= s, \\ \zeta(s) &= 0.\end{aligned}$$

Sledi

$$\Delta(s) = 0$$

in začetna krivulja ni karakteristika:

$$\begin{aligned}x &= 1 + \frac{1}{2}t^2, \\y &= s + t, \\u &= t.\end{aligned}$$

Če eliminiramo s in t , dobimo

$$u = \pm\sqrt{2(x-1)}.$$

To ni dobra rešitev, ker $\frac{\partial u}{\partial x}$ v okolici začetne krivulje ni omejen.

(iv)

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \frac{1}{2}s^2, \\ \eta(s) &= 2s, \\ \zeta(s) &= s.\end{aligned}$$

Sledi

$$\Delta(s) = s.$$

V točki $s = 0$ je $\Delta = 0$, zato pričakujemo težave z zveznostjo. Sledi

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}s^2 + st + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(s+t)^2, \\y &= 2s + t, \\u &= s + t.\end{aligned}$$

Če eliminiramo s in t , dobimo

$$u = \pm\sqrt{2x}.$$

To ni dobra rešitev, ker so odvodi v okolici ravnine $x = 0$ spet neomejeni. ▲

4.5 Splošna PDE prvega reda

Naj bo $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ primerna gladka funkcija. Obravnavamo enačbo

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{4.43}$$

ki naj ima rešitev $z = u(x, y)$, kjer je

$$\begin{aligned}p &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\q &= \frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

Za lažje pisanje se dogovorimo za oznake, kjer velika črka pomeni odvod funkcije F po ustrezni mali črki

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \dots &\dots \\ Q &= \frac{\partial F}{\partial q}. \end{aligned}$$

Če naj bo (4.43) res PDE, mora biti $P^2 + Q^2 \neq 0$.
Izberimo si neko točko

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Enačbo (4.43) parametrično (s parametrom λ) razrešimo na p in q in dobimo

$$\begin{aligned} p &= p(\lambda), \\ q &= q(\lambda) \end{aligned} \quad (4.44)$$

in s tem enoparametrično družino normal

$$\mathbf{n}(\lambda) = \begin{bmatrix} p(\lambda) \\ q(\lambda) \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

in enoparametrično družino tangentnih ravnin

$$(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\lambda) = 0, \quad (4.46)$$

kjer so

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

tekoče koordinate v tangentni ravnini.

V vsaki točki $\mathbf{x}$ imamo tako šop tangentnih ravnin. Njihova *ogrinjača* se imenuje *Mongeov² stožec*. Poiščimo enačbo Mongeovega stožca!

Mongeov stožec je ogrinjača ravnin (4.46).

Enačbo ogrinjače dobimo, če iz enačbe (4.46) in iz enačbe

$$(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}'(\lambda) = 0 \quad (4.47)$$

eliminiramo parameter λ .

Ogrinjačo družine ravnin bomo raje poiskali v parametrični obliki. Namesto enačbe (4.46) bomo izraze (4.44) vstavili v (4.43) in dobili, da je

$$F[x, y, z, p(\lambda), q(\lambda)] = 0 \quad (4.48)$$

²Gaspard Monge (1746-1818) je bil francoski matematik.

in to identično po λ , vse pri konstantnih x, y in z . Ker velja (4.48) za vse λ , odvajamo (4.48) po λ

$$Pp'(\lambda) + Qq'(\lambda) = 0. \quad (4.49)$$

Enačba (4.47) se glasi

$$(\xi - x)p'(\lambda) + (\eta - y)q'(\lambda) = 0. \quad (4.50)$$

Kadar je Mongeov stožec res stožec in ne *Mongeova os* (kvazilinearna enačba), $p'(\lambda)$ in $q'(\lambda)$ nista oba nič, ima sistem (4.49, 4.50) rešitev le, če je

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \xi - x & \eta - y \end{vmatrix} = 0,$$

ali

$$\begin{aligned} \xi - x &= \mu P, \\ \eta - y &= \mu Q. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Iz enačbe (4.46) ali

$$(\xi - x)p(\lambda) + (\eta - y)q(\lambda) - (\zeta - z) = 0$$

pa sledi še

$$\zeta - z = \mu[Pp(\lambda) + Qq(\lambda)]. \quad (4.52)$$

Tako smo dobili parametrično izražavo (parametra sta λ in μ) Mongeovega stožca

$$\begin{aligned} \xi - x &= \mu P(\lambda), \\ \eta - y &= \mu Q(\lambda), \\ \zeta - z &= \mu[P(\lambda)p(\lambda) + Q(\lambda)q(\lambda)]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pri konstantnem λ je to enačba *tvorilke stožca*.

Enačba (4.43) nam v vsaki točki določa Mongeov stožec (4.53). Imamo torej *polje Mongeovih stožcev*. Mongeov stožec je ogrinjača možnih tangentnih ravnin, zato se mora rešitev v vsaki točki dotikati ustreznega Mongeovega stožca.

Če se rešitev

$$z = u(x, y) \quad (4.54)$$

dotika Mongeovega stožca v točki

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

se ga dotika vzdolž tvorilke, zato imamo na vsaki rešitvi neko polje smeri, ki nam določa družino krivulj. Tangente na te krivulje imajo isto smer kot tvorilke, zato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P, \\ \dot{y} &= Q, \\ \dot{z} &= Pp + Qq. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Vzdolž krivulj (4.55) je

$$\begin{aligned} p &= p[x, y], \\ q &= q[x, y] \end{aligned}$$

in zato

$$\begin{aligned} \dot{p} &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} = Pp_x + Qp_y, \\ \dot{q} &= q_x \dot{x} + q_y \dot{y} = Pq_x + Qq_y. \end{aligned} \quad (4.56)$$

V enačbah (4.55) sta p in q definirana z rešitvijo (4.54). Rešitev (4.54) mora zadoščati enačbi (4.43), zato je

$$F[x, y, u(x, y), p(x, y), q(x, y)] = 0$$

identično za vse x in y in zato velja tudi

$$\begin{aligned} X + Zp + Pp_x + Qq_x &= 0, \\ Y + Zq + Pp_y + Qq_y &= 0. \end{aligned}$$

Funkcija u naj bo dvakrat zvezno odvedljiva. Potem je

$$p_y = u_{xy} = u_{yx} = q_x$$

in velja tudi

$$\begin{aligned} X + Zp + Pp_x + Qp_y &= 0, \\ Y + Zq + Pq_x + Qq_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Iz enačb (4.56) in (4.57) sledi sedaj

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -(X + Zp), \\ \dot{q} &= -(Y + Zq). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Tako dobimo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P, \\ \dot{y} &= Q, \\ \dot{z} &= Pp + Qq, \\ \dot{p} &= -(X + Zp), \\ \dot{q} &= -(Y + Zq), \end{aligned} \quad (4.59)$$

ki ga imenujemo *karakteristični sistem* enačbe (4.43). Pri izbranih začetnih pogojih nam karakteristični sistem ne določa samo krivulje

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

ampak v vsaki točki te krivulje še neko ravnino z normalo

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pravimo, da nam sistem (4.59) določa *karakteristični pas*.

Izrek 4.8 *Izhodna funkcija F je integral karakterističnega sistema (4.59).*

Dokaz. Vzdolž karakterističnega pasu je

$$\begin{aligned}\dot{F} &= X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} + P\dot{p} + Q\dot{q} = \\ &= XP + YQ + Z(Pp + Qq) - P(X + Zp) - Q(Y + Zq) = 0.\end{aligned}$$

Od tod sledi osnovna lastnost karakterističnega pasu: če se začetni pas dotika Mongeovega stožca, to je, če je

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

tedaj se ves karakteristični pas dotika Mongeovega polja.

Poiščimo tisto rešitev enačbe (4.43), ki gre skozi krivuljo

$$x = x_0(s). \quad (4.60)$$

Takole napravimo. Skozi vsako točko krivulje (4.60) potegnemo karakteristični pas. Tri pogoje za to že imamo:

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0(s), \\ y(t_0) &= y_0(s), \\ z(t_0) &= z_0(s).\end{aligned}$$

Določiti moramo še $p(t_0) = p_0(s)$ in $q(t_0) = q_0(s)$. Dva pogoja potrebujemo za to

(i) Začetni pas naj se dotika ustreznega Mongeovega stožca, torej

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0. \quad (4.61)$$

(ii) Normala na rešitev mora biti pravokotna na začetno krivuljo, zato mora biti tudi začetna ravnina tangentna na začetno krivuljo

$$z'_0 = p_0 x'_0 + q_0 y'_0. \quad (4.62)$$

Iz enačb (4.61) in (4.62) izračunamo p_0 in q_0 , rešimo karakteristični sistem (4.59) in dobimo

$$\begin{aligned}x &= x(s, t), \\ y &= y(s, t), \\ z &= z(s, t), \\ p &= p(s, t), \\ q &= q(s, t).\end{aligned} \quad (4.63)$$

Iz prvih dveh enačb (4.63) izračunamo s in t in dobimo

$$z = u(x, y).$$

Oglejmo si primer.

Primer 4.23 Enačbi

$$p^2 - q^2 - z = 0$$

pripada karakteristični sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2p, \\ \dot{y} &= -2p, \\ \dot{z} &= 2p^2 - 2q^2 = 2z, \\ \dot{p} &= p, \\ \dot{q} &= q.\end{aligned}$$

Poiščimo rešitev, ki poteka skozi premico

$$\begin{aligned}x &= z, \\ y &= z,\end{aligned}$$

to je,

$$\begin{aligned}x_0 &= s, \\ y_0 &= s, \\ z_0 &= s,\end{aligned}$$

veljati pa mora še (4.61) in (4.62)

$$\begin{aligned}p_0^2 - q_0^2 &= z_0 = s, \\ 1 &= p_0 + q_0.\end{aligned}$$

Sledi

$$p_0 - q_0 = s$$

in od tod

$$\begin{aligned}p_0 &= \frac{1+s}{2}, \\ q_0 &= \frac{1-s}{2}.\end{aligned}$$

Rešimo karakteristični sistem

$$\begin{aligned}p &= \frac{1+s}{2}e^t, \\ q &= \frac{1-s}{2}e^t, \\ z &= se^{2t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (s+1)e^t \quad \therefore \\ x &= (s+1)e^t - 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (s-1)e^t \quad \therefore \\ y &= (s-1)e^t + 1.\end{aligned}$$

Eliminiramo s in t

$$\left. \begin{aligned} (s+1)e^t &= x+1 \\ (s-1)e^t &= y-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} se^t &= (x+y)/2, \\ e^t &= (x-y+2)/2, \end{aligned}$$

$$z = u(x, y) := se^t \cdot e^t = \frac{1}{4}(x+y)(x-y+2),$$

ali

$$u(x, y) = \frac{(1+x)^2}{4} - \frac{(1-y)^2}{4}. \quad (4.64)$$

Očitno poteka (4.64) skozi premico $x = y = z$, res pa tudi reši enačbo

$$p^2 - q^2 = z.$$

▲

Izrek 4.9 Opisani postopek nam vedno dá rešitev Cauchyjeve naloge, če je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \neq 0.$$

Dokaz. Preveriti je treba, da je

$$F[x, y, u(x, y), p(x, y), q(x, y)] = 0,$$

kar že vemo, in da je

$$du(x, y) = p(x, y) dx + q(x, y) dy, \quad (4.65)$$

to je, da sta funkciji p in q res parcialna odvoda rešitve u na x in y . Če enačbo (4.65) izrazimo z s in t , dobimo

$$u_s ds + u_t dt = p(x_s ds + x_t dt) + q(y_s ds + y_t dt).$$

Parametra s in t sta neodvisna, zato sledi

$$u_s = p(x, y)x_s + q(x, y)y_s, \quad (4.66)$$

$$u_t = p(x, y)x_t + q(x, y)y_t. \quad (4.67)$$

Enačba (4.67) je posledica karakterističnega sistema

$$\dot{z} = Pp + Qq = p\dot{x} + q\dot{y}.$$

Dokazati moramo še (4.66) V ta namen označimo

$$w := u_s - px_s - qy_s$$

in sledi

$$w_t = u_{st} - px_{st} - qy_{st} - p_tx_s - q_ty_s. \quad (4.68)$$

Iz enačbe (4.67), za katero že vemo, da velja, pa sledi

$$0 = u_{ts} - px_{ts} - qy_{ts} - p_s x_t - q_s y_t. \quad (4.69)$$

Enačbi (4.68) in (4.69) odštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} w_t &= -p_t x_s - q_t y_s + p_s x_t + q_s y_t = \\ &= (X + Zp)x_s + (Y + Zq)y_s + Pp_s + Qq_s = \\ &= (Xx_s + Yy_s + Pp_s + Qq_s + Zu_s) - Z(u_s - px_s - qy_s) = \\ &= F_s - Zw = \\ &= -Zw, \end{aligned}$$

saj velja $F = 0$ na vsej ploskvi. Preostane nam

$$\dot{w} + Zw = 0,$$

ali

$$w(t) = w_0 e^{-\int Z dt}.$$

Ker je

$$w_0 = 0,$$

sledi

$$w(t) = 0.$$

Kaj se zgodi, če je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = 0,$$

to je,

$$\dot{x}y_s = \dot{y}x_s,$$

ali

$$Py_s = Qx_s,$$

ali

$$\begin{aligned} x_s &= \lambda P, \\ y_s &= \lambda Q. \end{aligned}$$

Če je naloga rešljiva, velja

$$u_s = px_s + qy_s = \lambda(Pp + Qq), \quad (4.70)$$

od tod pa sledi še

$$\begin{aligned} p_s &= -\lambda(X + pZ), \\ q_s &= -\lambda(Y + qZ) \end{aligned}$$

in je začetna krivulja kar karakteristika. Rešitev ni enolična. Če pa (4.70) ne velja, naloga nima rešitve.

4.6 Popolni, splošni in singularni integrali

Rešitev $z = u(x, y)$ enačbe

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (4.71)$$

ki vsebuje poljubno gladko funkcijo (ene spremenljivke), se imenuje *splošni integral*. Rešitev, ki vsebuje dve *bistveni konstanti*, se imenuje *popolni integral*. Pri tem se konstanti a in b v integralu $\Phi(x, y, a, b)$ imenujeta bistveni, če ima matrika

$$M = \begin{bmatrix} \Phi_a & \Phi_{xa} & \Phi_{ya} \\ \Phi_b & \Phi_{xb} & \Phi_{yb} \end{bmatrix}$$

rang 2.

Ta pogoj jamči, da sta konstanti res dve. Če bi namreč lahko pisali

$$\Phi(x, y, a, b) = \Psi(x, y, c),$$

kjer je

$$c = g(a, b),$$

bi veljalo

$$M = \begin{bmatrix} \Psi_c g_a & \Psi_{xc} g_a & \Psi_{yc} g_a \\ \Psi_c g_b & \Psi_{xc} g_b & \Psi_{yc} g_b \end{bmatrix},$$

ta matrika pa ima rang manjši od 2.

Po drugi strani, če je Φ popolni integral in si ogledamo enačbe

$$\begin{aligned} z &= \Phi(x, y, a, b), \\ p &= \Phi_x(x, y, a, b), \\ q &= \Phi_y(x, y, a, b), \end{aligned} \quad (4.72)$$

je vsaj ena od determinant

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(a, b)}, \quad \frac{\partial(z, p)}{\partial(a, b)}, \quad \frac{\partial(z, q)}{\partial(a, b)}$$

od nič različna in lahko iz enačb (4.72) eliminiramo a in b ter dobimo enačbo oblike (4.71), ki ima funkcijo Φ za rešitev.

Primer 4.24 Vzemimo popolni integral

$$z = ax + a^2y + b.$$

Sledi

$$\begin{aligned} p &= a, \\ q &= a^2 \end{aligned}$$

in dobimo enačbo, katere integral je prvotna funkcija z :

$$q = p^2.$$

▲
Popolni integral je na videz manj splošna rešitev kot splošni integral. Pa temu ni tako. Če imamo enoparametrično družino rešitev, je njena ovojnica, če obstaja, spet rešitev. Iz dvoparametrične družine rešitev pa lahko napravimo mnogo enoparametričnih družin: izberemo si poljubno gladko funkcijo w in postavimo

$$b = w(a)$$

ter zgradimo ogrinjačo. Le-ta je (netrivialno) odvisna od funkcije w .

Primer 4.25 V popolni integral

$$z = ax + a^2y + b$$

enačbe

$$q = p^2$$

postavimo

$$b = a$$

in poiščemo ogrinjačo družine.

$$\begin{aligned} z &= ax + a^2y + a, \\ 0 &= x + 2ay + 1, \\ a &= -\frac{1+x}{2y} \end{aligned}$$

in dobimo *partikularno rešitev*

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1+x}{2y} \left(x - \frac{1+x}{2} + 1 \right), \\ z &= -\frac{(x+1)^2}{4y}. \end{aligned}$$

▲
Enačba pa utegne imeti še *singularni integral*. Tega dobimo, če sestavimo ogrinjačo dvoparametrične družine, ki jo predstavlja popolni integral: iz enačb

$$\begin{aligned} z &= \Phi(x, y, a, b), \\ 0 &= \Phi_a(x, y, a, b), \\ 0 &= \Phi_b(x, y, a, b), \end{aligned}$$

eliminiramo a in b . To je mogoče, ker je Φ popolni integral. Zanimivo je, da lahko singularni integral poiščemo direktno iz enačbe, ne da bi poznali popolni integral. Enačba

$$F(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y) = 0$$

velja identično v a in b , zato jo lahko odvajamo

$$\begin{aligned} Z\Phi_a + P\Phi_{xa} + Q\Phi_{ya} &= 0, \\ Z\Phi_b + P\Phi_{xb} + Q\Phi_{yb} &= 0. \end{aligned}$$

Na singularnem integralu je $\Phi_a = \Phi_b = 0$. Če je

$$\begin{vmatrix} \Phi_{xa} & \Phi_{ya} \\ \Phi_{xb} & \Phi_{yb} \end{vmatrix} = \frac{\partial(p, q)}{\partial(a, b)} \neq 0, \quad (4.73)$$

mora biti

$$P = Q = 0.$$

Iz treh enačb

$$F = P = Q = 0 \quad (4.74)$$

lahko sedaj eliminiramo p in q ter dobimo singularni integral. Ker ne moremo vedeti, če je pogoj (4.73) izpolnjen, moramo preveriti, če funkcija, dobljena z eliminacijo iz (4.74), res zadošča enačbi (4.71).

Popolni integral nam zadošča, da rešimo Cauchyjevo nalogo: poiskati rešitev, ki poteka skozi dano krivuljo. Tri možnosti so

- (i) Rešitev je poseben primer popolnega integrala.
- (ii) Rešitev je ogrinjača enoparametrične poddružine.
- (iii) Rešitev je ogrinjača dvoparametrične družine – singularni integral.

Primeri (i) in (iii) sta izjemi. Raziščimo primer (ii). Poiskati moramo ogrinjačo enoparametrične poddružine, ki poteka skozi krivuljo

$$\begin{aligned} x &= \xi(s), \\ y &= \eta(s), \\ z &= \zeta(s). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Ogrinjača se v vsaki točki dotika ene od ploskev enoparametrične poddružine; specialno to velja za vsako točko krivulje (4.75). Toda, če gre ogrinjača skozi krivuljo (4.75), se krivulje (4.75) v vsaki točki dotika, glej dokaz izrek 4.8, torej se tudi člani enoparametrične poddružine (vsak v svoji točki) dotikajo krivulje (4.75). S tem je poddružina določena: v vsaki točki krivulje (4.75) se en član poddružine dotika krivulje (4.75). Napišimo ta pogoj! Enačba

$$\zeta(s) = \Phi[\xi(s), \eta(s), a, b] \quad (4.76)$$

mora imeti same dvojne korene, torej velja še

$$\frac{d\zeta(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\Phi[\xi(s), \eta(s), a, b]. \quad (4.77)$$

Iz enačb (4.76) in (4.77) eliminiramo s in dobimo zvezo med a in b , recimo

$$\psi(a, b) = 0.$$

Od tod lahko, na več načinov morda, izračunamo

$$b = \psi_k(a)$$

in dobimo nekaj enoparametričnih poddružin. Ogrinjače so iskane rešitve.

Primer 4.26 Enačba $q = p^2$ ima popolni integral

$$z = ax + a^2y + b.$$

Poiščimo rešitev, ki poteka skozi parabolo

$$y = x^2, \quad z = 0,$$

ali

$$\begin{aligned}\xi(s) &= s, \\ \eta(s) &= s^2, \\ \zeta(s) &= 0.\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}0 &= as + a^2s^2 + b, \\ 0 &= a + 2a^2s,\end{aligned}\tag{4.78}$$

ali

$$as = -\frac{1}{2},$$

od koder sledi

$$b = \frac{1}{4}.$$

Enoparametrična poddružina je

$$z = ax + a^2y + \frac{1}{4}.$$

Za ogrinjačo privzamemo še enačbo

$$0 = x + 2ay,$$

od koder sledi

$$a = -\frac{x}{2y}$$

in

$$z = -\frac{x^2}{2y} + \frac{x^2}{4y} + \frac{1}{4} = \frac{y - x^2}{4y}.$$

Ker je

$$\begin{aligned} p &= -\frac{x}{2y}, \\ q &= \frac{x^2}{4y^2}, \end{aligned}$$

ta funkcija res reši enačbo

$$p^2 = q.$$

Enačba (4.78) ima še drugo rešitev, $a = 0$, ki pripelje do $b = 0$ in $z = 0$. To je, slučajno, tudi singularni integral.

▲

4.7 Lagrange-Charpитеjeva metoda

Za praktično reševanje je popolni integral preprostejši od Cauchyjeve metode. *Lagrange-Charpитеjeva metoda* nam daje splošno pot do popolnega integrala.

Hkrati z dano enačbo

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (4.79)$$

postavimo še eno enačbo

$$G(x, y, z, p, q) = 0, \quad (4.80)$$

ki ima tudi funkcijo u za rešitev. Funkcija G naj bo taka, da lahko iz enačb (4.79) in (4.80) izračunamo

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z), \\ q &= q(x, y, z), \end{aligned} \quad (4.81)$$

torej

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)} \neq 0. \quad (4.82)$$

Za funkciji (4.81) mora seveda veljati

$$dz = p dx + q dy, \quad (4.83)$$

če naj bosta p in q parcialna odvoda funkcije u , kar pri poljubni gladki funkciji G ne bo res. Pogoji splošnejše oblike kot je (4.83), namreč

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \quad (4.84)$$

na neki ploskvi v splošnem ne more biti izpolnjen. Velja

Izrek 4.10 *Potreben in zadosten pogoj, da ima enačba (4.84) dvorazsežno rešitev, je*

$$\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0, \quad (4.85)$$

kjer je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Izrek 4.10 bomo dokazali kasneje, glej razdelek 4.8. V našem primeru je

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} p \\ q \\ -1 \end{bmatrix}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -q_z \mathbf{i} + p_z \mathbf{j} + (q_x - p_y) \mathbf{k} \end{aligned}$$

in pogoj (4.85) se glasi

$$-pq_z + qp_z - (q_x - p_y) = 0,$$

ali

$$p_y + qp_z = q_x + pq_z. \quad (4.87)$$

Če sedaj odvajamo enačbi (4.79) in (4.80) na z , dobimo

$$\begin{aligned} F_z + F_p p_z + F_q q_z &= 0, \\ G_z + G_p p_z + G_q q_z &= 0 \end{aligned}$$

in od tod

$$\begin{aligned} p_z &= -\frac{\begin{vmatrix} F_z & F_q \\ G_z & G_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}, \\ q_z &= -\frac{\begin{vmatrix} F_p & F_z \\ G_p & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Odvajanje na x nam dá

$$\begin{aligned} F_x + F_p p_x + F_q q_x &= 0, \\ G_x + G_p p_x + G_q q_x &= 0 \end{aligned}$$

in od tod

$$q_x = - \frac{\begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}.$$

Odvajanje na y nam dá

$$\begin{aligned} F_y + F_p p_y + F_q q_y &= 0, \\ G_y + G_p p_y + G_q q_y &= 0 \end{aligned}$$

in od tod

$$p_y = - \frac{\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}.$$

Končno se pogoj (4.87) glasi

$$- \begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} F_z & F_q \\ G_z & G_q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} F_p & F_z \\ G_p & G_z \end{vmatrix} = 0,$$

ali

$$\begin{vmatrix} F_p & F_x + pF_z \\ G_p & G_x + pG_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q & F_y + qF_z \\ G_q & G_y + qG_z \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijmo determinante in uporabimo standardne oznake (velike črke so odvodi funkcije F po malih črkah)

$$PG_x + QG_y + (Pp + Qq)G_z - (X + Zp)G_p - (Y + Zq)G_q = 0.$$

To je homogena kvazilinearna enačba za funkcijo G s karakterističnim sistemom (4.59). En integral že poznamo, to je F . Če dobimo še enega, $G = a$, neodvisnega od F , lahko iz enačb

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ G(x, y, z, p, q) &= a \end{aligned}$$

izračunamo p in q

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z, a), \\ q &= q(x, y, z, a). \end{aligned}$$

Vemo, da bo enačba (4.83) integrabilna in če jo integriramo, dobimo še drugo konstanto.

Primer 4.27 Enačba

$$p^2 - 3xyz^2q = 0 \quad (4.88)$$

ima karakteristični sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2p, \\ \dot{y} &= -3xyz^2, \\ \dot{z} &= 2p^2 - 3xyz^2q, \\ \dot{p} &= 3yz^2q + 6xyzpq, \\ \dot{q} &= 3xz^2q + 6xyzq^2. \end{aligned}$$

Upoštevamo enačbo (4.88) in dobimo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2p, \\ \dot{y} &= -\frac{p^2}{q}, \\ \dot{z} &= p^2, \\ \dot{p} &= \frac{p^2}{x} + 2\frac{p^3}{z}, \\ \dot{q} &= \frac{p^2}{y} + 2\frac{p^2q}{z}. \end{aligned}$$

Potrebujemo le en integral, neodvisen od (4.88).

$$\begin{aligned} \frac{\dot{p}}{p} - \frac{\dot{q}}{q} &= \frac{p}{x} - \frac{p^2}{qy} = \\ &= \frac{\dot{x}}{2x} + \frac{\dot{y}}{y}, \\ \frac{p}{q} &= ay\sqrt{x}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Enačbi (4.88) in (4.89) razrešimo na p in q :

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q} &= apy\sqrt{x} = \\ &= 3xyz^2, \\ p &= \frac{3xyz^2}{ay\sqrt{x}} = \\ &= \frac{3z^2\sqrt{x}}{a}, \\ q &= \frac{p}{ay\sqrt{x}} = \\ &= \frac{3z^2\sqrt{x}}{a^2y\sqrt{x}} = \\ &= \frac{3z^2}{a^2y}. \end{aligned}$$

Enačba

$$dz = \frac{3z^2\sqrt{x}}{a} dx + \frac{3z^2}{a^2y} dy$$

je zagotovo integrabilna in sicer takole:

$$\begin{aligned} a^2 \frac{dz}{z^2} &= 3a\sqrt{x} dx + \frac{3}{y} dy, \\ b - \frac{a^2}{z} &= 2ax\sqrt{x} + 3 \log y. \end{aligned}$$

To je popolni integral.

Zelo preprosto uženemo poenostavljene primere.

(i)

$$F(p, q) = 0.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p, \\ \dot{y} &= F_q, \\ \dot{z} &= pF_p + qF_q, \\ \dot{p} &= 0, \\ \dot{q} &= 0. \end{aligned}$$

En integral je

$$p = a,$$

ali pa

$$q = a,$$

še bolje pa je, če enačbo

$$F(p, q) = 0$$

razrešimo parametrično s parametrom a :

$$\begin{aligned} p &= \varphi(a), \\ q &= \psi(a). \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} dz &= \varphi(a) dx + \psi(a) dy, \\ z &= \varphi(a)x + \psi(a)y + b. \end{aligned}$$

Primer 4.28

$$\begin{aligned}
 p^2 + q^2 &= 1, \\
 p &= \cos a, \\
 q &= \sin a, \\
 dz &= \cos a \, dx + \sin a \, dy, \\
 z &= x \cos a + y \sin a + b.
 \end{aligned}$$

▲

(ii)

$$f(x, p) = g(y, q).$$

Sledi karakteristični sistem

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f_p, \\
 \dot{y} &= -g_q, \\
 \dot{z} &= pf_p - qg_q, \\
 \dot{p} &= -f_x, \\
 \dot{q} &= g_y
 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
 \dot{x}f_x + \dot{p}f_p &= 0, \\
 \frac{d}{dt}f(x, p) &= 0, \\
 f(x, p) &= a, \\
 g(y, q) &= a.
 \end{aligned}$$

Zadnji dve enačbi razrešimo na p in q

$$\begin{aligned}
 p &= \varphi(x, a), \\
 q &= \psi(y, a)
 \end{aligned}$$

in sledi

$$\begin{aligned}
 dz &= \varphi(x, a) \, dx + \psi(y, a) \, dy, \\
 z &= \int \varphi(x, a) \, dx + \int \psi(y, a) \, dy + b.
 \end{aligned}$$

Primer 4.29

$$\begin{aligned}
 xq &= yp, \\
 \frac{p}{x} &= \frac{q}{y} = 2a, \\
 p &= 2ax, \\
 q &= 2ay, \\
 dz &= 2ax \, dx + 2ay \, dy, \\
 z &= a(x^2 + y^2) + b.
 \end{aligned}$$



(iii)

$$F(z, p, q) = 0.$$

Sledi karakteristični sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_p, \\ \dot{y} &= F_q, \\ \dot{z} &= pF_p + qF_q, \\ \dot{p} &= -pF_z, \\ \dot{q} &= -qF_z\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\frac{\dot{p}}{p} &= \frac{\dot{q}}{q}, \\ p &= aq.\end{aligned}$$

Iz enačbe

$$F(z, aq, q) = 0$$

izračunamo

$$q = \varphi(z)$$

in sledi

$$dz = a\varphi(z) dx + \varphi(z) dy,$$

ali

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = d(ax + y),$$

ali

$$ax + y = \psi(z).$$

To enačbo obrnemo

$$z = w(ax + y)$$

in tukaj začnemo.

$$\begin{aligned}z &= w(ax + y), \\ p &= aw', \\ q &= w'.$$

Dobimo navadno diferencialno enačbo prvega reda za funkcijo w

$$F(w, aw', w') = 0.$$

Primer 4.30

$$\begin{aligned}
z^2(p^2 + q^2 + 1) &= 1, \\
z &= w(ax + y), \\
w^2 \left[(a^2 + 1) w'^2 + 1 \right] &= 1, \\
w' &= \sqrt{\frac{1 - w^2}{w^2(1 + a^2)}}, \\
\frac{w \, dw}{\sqrt{1 - w^2}} &= \frac{d(ax + y)}{\sqrt{1 + a^2}}, \\
-\sqrt{1 - w^2} &= \frac{ax + y + b}{\sqrt{1 + a^2}}, \\
1 - w^2 &= \frac{(ax + y + b)^2}{1 + a^2}.
\end{aligned}$$

Če pišemo

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} &= \cos \alpha, \\
\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} &= \beta,
\end{aligned}$$

dobimo

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha + \beta)^2 + z^2 = 1.$$

▲

(iv) (Clairaut)

$$\begin{aligned}
z &= px + qy + f(p, q), \\
\dot{x} &= x + f_p, \\
\dot{y} &= y + f_q, \\
\dot{z} &= px + qy + pf_p + qf_q, \\
\dot{p} &= 0, \\
\dot{q} &= 0.
\end{aligned}$$

Dobimo kar dva integrala

$$\begin{aligned}
p &= a, \\
q &= b
\end{aligned}$$

in

$$z = ax + by + f(a, b).$$

To je res popolni integral Clairautove enačbe.

4.8 Pfaffova enačba

Imejmo vektorsko polje $\mathbf{F}$ in vprašajmo po mnogoterosti, pravokotni na to polje. Če je $d\mathbf{x}$ diferencial na tej mnogoterosti, zahtevamo torej

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (4.90)$$

Izraz $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ imenujemo *Pfaffova³ forma (Pfaffian)*, enačbo (4.90) pa *Pfaffova enačba*.

Vzemimo najprej ravninsko polje

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} M(x, y) \\ N(x, y) \end{bmatrix}.$$

Enačba (4.90) se glasi

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

To je navadna diferencialna enačba, ki je praviloma rešljiva. Sklep: dvorazsežna Pfaffova enačba ima (skoraj) vedno enorazsežno rešitev.

Oglejmo si, kaj o tej rešitvi še lahko povemo. Rešitev, krivuljo, pravokotno na polje, napišemo v implicitni obliki

$$u(x, y) = C.$$

Na tej krivulji je

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

in obstaja funkcija μ , da velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \mu M, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \mu N. \end{aligned}$$

Funkcijo μ imenujemo *integrirajoči faktor*. Če je funkcija u dvakrat zvezno odvedljiva, sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N), \\ N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial u}{\partial y} &= (M_y - N_x) \mu. \end{aligned}$$

To je kvazilinearna enačba za μ . Če najdemo rešitev, je

$$\mu(M dx + N dy) = du$$

³ Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) je bil nemški matematik.

popolni diferencial.

Poglejmo v tri dimenzije

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0. \quad (4.91)$$

Iščemo mnogoterost, na kateri bo enačba izpolnjena.

Razsežnost 0 je točka, $d\mathbf{x} = 0$, enačba je trivialno izpolnjena.

Pri razsežnosti 3 je $d\mathbf{x}$ poljuben, enačba je rešljiva le v trivialnem primeru $\mathbf{F} = 0$.

Enorazsežnih rešitev, krivulj, je veliko. Res, izberimo poljubno gladko ploskev

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v). \quad (4.92)$$

Na tej ploskvi iščemo rešitev, to je krivuljo $u = u(t)$, $v = v(t)$, ki reši Pfaffovo enačbo (4.91). Na ploskvi (4.92) je

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv,$$

torej

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_u) du + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_v) dv = 0.$$

To je Pfaffova enačba v ravnini, ki ima (praktično) vedno enorazsežno rešitev.

Najbolj zanimive so dvorazsežne rešitve, ploskve. Iščemo jih kot *nivojnice*

$$u(\mathbf{x}) = \text{const}. \quad (4.93)$$

Če velja

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0, \quad (4.94)$$

je naloga preprosta. Integral

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

je neodvisen od poti, torej je le funkcija zgornje (in spodnje) meje, zato velja

$$\text{grad } u = \mathbf{F}.$$

Enačba (4.90) pomeni

$$\text{grad } u \cdot d\mathbf{x} = du(\mathbf{x}) = 0$$

in je

$$u(\mathbf{x}) = \text{const}$$

rešitev Pfaffove enačbe (4.90).

Kaj pa če je $\text{rot } \mathbf{F} \neq 0$? Na ploskvi $u(\mathbf{x}) = \text{const}$ velja

$$\text{grad } u \cdot d\mathbf{x} = 0,$$

poleg tega pa še zahtevamo (4.90). Pri tem je $d\mathbf{x}$ poljuben vektor v tangentialni ravnini, zato sta vektorja $\mathbf{F}$ in $\text{grad } u$ kolinearna

$$\text{grad } u = \mu \mathbf{F}. \quad (4.95)$$

Obratno, če je pogoj (4.95) izpolnjen, pomnožimo enačbo (4.90) z μ

$$\mu \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \text{grad } u \cdot d\mathbf{x} = du(\mathbf{x}) = 0$$

in je

$$u(\mathbf{x}) = \text{const}$$

spet rešitev. Velja torej

Izrek 4.11 *Trorazsežna Pfaffova enačba ima dvorazsežno rešitev natanko takrat, ko obstaja funkcija μ , taka, da je polje $\mu \mathbf{F}$ potencialno.*

Od tu dobimo takoj potreben pogoj za obstoj dvorazsežne rešitve. Če je enačba (4.90) rešljiva, je po izreku (4.11)

$$\text{rot}(\mu \mathbf{F}) = 0,$$

ali

$$\mu \text{rot } \mathbf{F} + \text{grad } \mu \times \mathbf{F} = 0.$$

To enačbo pomnožimo skalarno z $\mathbf{F}$ in upoštevamo, da je

$$\mathbf{F} \cdot (\text{grad } \mu \times \mathbf{F}) = \text{grad } \mu \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{F}) = 0$$

in dobimo

$$\mu \mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F} = 0,$$

ali

$$\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F} = 0. \quad (4.96)$$

Izrek 4.12 *Pogoj (4.96) je tudi zadosten za obstoj dvorazsežne rešitve Pfaffove enačbe (4.90).*

Dokaz. Vzemimo ploskev

$$z = \text{const} \quad (4.97)$$

in na njej poiščimo enorazsežno rešitev. Na ploskvi (4.97) je $dz = 0$ in Pfaffova enačba se glasi

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy = 0,$$

kjer je z parameter. Taka enačba je vedno rešljiva, recimo

$$U(x, y, z) = c(z).$$

Pokažimo, da funkcijo c lahko določimo tako, da bo

$$u(x, y, z) = U(x, y, z) - c(z)$$

rešitev trirazsežne enačbe (4.90). Če je enačba (4.90) rešljiva, mora biti

$$\text{grad } u = \mu \mathbf{F}, \quad (4.98)$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \mu P, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \mu Q, \\ \frac{\partial U}{\partial z} - c'(z) &= \mu R. \end{aligned}$$

Tak μ , da sta prvi dve enačbi izpolnjeni, zagotovo obstaja. Iz tretje enačbe potem izračunamo $c(z)$:

$$c'(z) = \frac{\partial U}{\partial z} - \mu R := K.$$

Če dokažemo, da je K odvisen le od z in c , $K = K(z, c)$, je

$$c'(z) = K(z, c)$$

navadna diferencialna enačba, ki jo lahko v načelu rešimo.

Sedaj računamo:

$$\begin{aligned}(\mu \mathbf{F}) \cdot \operatorname{rot}(\mu \mathbf{F}) &= \mu \mathbf{F} \cdot (\mu \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{grad} \mu \times \mathbf{F}) = \\&= \mu^2 \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} = \\&= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu \mathbf{F} &= \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} U - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c' \end{bmatrix} = \\&= \operatorname{grad} U - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mu \mathbf{F} &= -\operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} = \\&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial K}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu \mathbf{F}) \cdot \operatorname{rot}(\mu \mathbf{F}) &= -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial x} = \\&= \frac{\partial(U, K)}{\partial(x, y)} = \\&= 0.\end{aligned}$$

Poslednja enačba pove, da sta funkciji K in U odvisni:

$$K = K(z, U) = K(z, c).$$

■

Primer 4.31

$$2yz \, dx + 2zx \, dy + 3xy \, dz = 0.$$

Vzemimo $dz = 0$. Sledi

$$\begin{aligned}y \, dx + x \, dy &= 0, \\xy &= c(z), \\u(x, y, z) &= xy - c(z).\end{aligned}$$

Enačbe (4.98) se glase

$$\begin{aligned}y &= 2\mu yz, \\x &= 2\mu zx, \\-c'(x) &= 3\mu xy.\end{aligned}$$

Prvi dve enačbi povesta

$$\mu = \frac{1}{2z}$$

in nato tretja enačba pove

$$-c'(z) = \frac{3xy}{2z} = \frac{3c(z)}{2z},$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{dc(z)}{c(z)} + \frac{3}{2} \frac{dz}{z} &= 0, \\ c(z)z^{3/2} &= \sqrt{C}, \\ c^2 z^3 &= C, \\ x^2 y^2 z^3 &= C. \end{aligned}$$

▲

Primer 4.32

$$2xz \, dx + z \, dy - dz = 0.$$

Najpreprosteje bo, če vzamemo $dx = 0$. Sledi

$$\begin{aligned} z \, dy - dz &= 0, \\ -dy + \frac{dz}{z} &= 0, \\ -y + \log z &= c(x) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} -c'(x) &= 2\mu xz, \\ -1 &= \mu z, \\ \frac{1}{z} &= -\mu. \end{aligned}$$

Iz zadnjih dveh enačb sledi

$$\mu = -\frac{1}{z}$$

in

$$\begin{aligned} -c'(x) &= -2x, \\ c(x) &= x^2 + C, \\ \log z - y - x^2 &= C. \end{aligned}$$

▲

4.9 Naloge

4.1 Eliminiraj konstanti a in b iz naslednjih enačb:

(a) $u = (x + a)(y + b)$.

(b) $2u = (ax + y)^2 + b$.

(c) $ax^2 + by^2 + u^2 = 1$.

4.2 Eliminiraj funkcijo w iz naslednjih enačb:

(a) $u = xy + w(x^2 + y^2)$.

(b) $u = x + y + w(xy)$.

(c) $u = w\left(\frac{xy}{u}\right)$.

(d) $u = w(x - y)$.

4.3 V naslednjih enačbah je $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ in $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Poišči splošni integral naslednjih diferencialnih enačb:

(a) $x^2p + y^2q = (x + y)u$.

(b) $u(xp - yq) = y^2 - x^2$.

(c) $px(u - 2y^2) = (u - qy)(u - y^2 - 2x^3)$.

(d) $px(x + y) = qy(x + y) - (x - y)(2x + 2y - u)$.

(e) $y^2p - xyq = x(u - 2y)$.

(f) $(y + ux)p - (x + yu)q = x^2 - y^2$.

(g) $x(x^2 + 3y^2)p - y(3x^2 + y^2)q = 2u(y^2 - x^2)$.

4.4 Poišči enačbo družine ploskev, ki sekajo družino stožcev

$$x^2 + y^2 + u^2 = cxy$$

pravokotno.

4.5 Poišči rešitev enačbe

$$(x + u)p + (y + u)q + u = 0,$$

ki gre skozi krožnico $x^2 + y^2 = a^2$, $u = a$.

4.6 Poišči rešitev enačbe

$$x^3p + y(3x^2 + y)q = u(2x^2 + u),$$

ki gre skozi parabolo $x = 1$, $y^2 = u - y$.

4.7 Poišči rešitev enačbe

$$(p - q)(x + y) = u,$$

ki gre skozi krivuljo $x + y + u = 0$, $x = u^2$.

4.8 Poišči rešitev enačbe

$$x(y^2 + u)p - y(x^2 + u)q = (x^2 - y^2)u,$$

ki gre skozi premico $x + y = 0$, $u = 1$.

4.9 Poišči rešitev enačbe

$$2y(u - 3)p + (2x - u)q = y(2x - 3),$$

ki gre skozi krožnico $x^2 + y^2 = 2x$, $u = 0$.

4.10 Poišči rešitev enačbe

$$(2xy - 1)p + (u - 2x^2)q = 2(x - yu),$$

ki gre skozi premico $x = 1$, $y = 0$.

4.11 Poišči rešitev enačbe

$$(x - y)y^2p + (y - x)x^2q = (x^2 + y^2)u,$$

ki gre skozi krivuljo $xu = a^3$, $y = 0$.

4.12 Poišči rešitev enačbe

$$(x - y)p + (y - x - u)q = u,$$

ki gre skozi krožnico $x^2 + y^2 = 1$, $u = 1$.

4.13 Poišči rešitev enačbe

$$x(u + 2a)p + (xu + 2yu + 2ay)q = u(u + a),$$

ki gre skozi krivuljo $y = 0$, $u^2 = 4ax$.

4.14 Poišči rešitev enačbe

$$x(u + 2a)p + (xu + 2yu + 2ay)q = u(u + a),$$

ki gre skozi krivuljo $y = 0$, $u^3 + x(u + a)^2 = 0$.

4.15 Primerki v kanibalskem okolju se plodijo in umirajo pa naslednjih zakonih:

- (a) Vsak primerek z verjetnostjo $\lambda\delta t + o(\delta t)$ v času $(t, t + \delta t)$ rodi nov primerek;

- (b) če je trenutno pri življenju n primerkov, bodo vsak primerek tekmeci v času $(t, t + \delta t)$ z verjetnostjo $\beta(n - 1)\delta t + o(\delta t)$ požrli, z verjetnostjo $\alpha\delta t + o(\delta t)$ pa bo v času $(t, t + \delta t)$ poginil;
- (c) verjetnost za dva taka dogodka v času $(t, t + \delta t)$ je $o(\delta t)$.

Pokaži, da je verjetnostna porazdelitev v času stabilna, če je $\alpha = 0$ in sta λ in β pozitivna. Za ta primer izračunaj verjetnost, da je v času t živih n primerkov in pokaži, da je povprečno število živih primerkov

$$\frac{\lambda/\beta}{1 - \exp(-\lambda/\beta)}.$$

4.16 Poišči rešitev enačbe

$$u = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) + (p - x)(q - y),$$

ki poteka skozi os x .

4.17 Poišči rešitev enačbe

$$pq = u,$$

ki poteka skozi parabolo $x = 0$, $y^2 = u$.

4.18 Zapiši karakteristični sistem enačbe

$$(1 + q^2)u = px,$$

reši ga do kraja, in poišči rešitev, ki poteka skozi krivuljo $x^2 = 2u$, $y = 0$.

4.19 Poišči popolne integrale naslednjih enačb:

(a) $(p^2 + q^2)y = qu.$

(b) $p = (u + qy)^2.$

(c) $u^2 = pqxy.$

(d) $xp + 3yq = 2(u - x^2q^2).$

(e) $px^5 - 4q^3x^2 + 6x^2u - 2 = 0.$

(f) $2(y + uq) = q(xp + yq).$

(g) $2(u + xp + yq) = yp^2.$

(h) $pq = 1.$

(i) $p^2u^2 + q^2 = 1.$

(j) $p^2y(1 + x^2) = qx^2.$

(k) $(p + q)(u - xp - yq) = 1.$

- (l) $p + q = pq$.
 (m) $u = p^2 - q^2$.
 (n) $upq = p + q$.
 (o) $p^2q(x^2 + y^2) = p^2 + q$.
 (p) $p^2q^2 + x^2y^2 = x^2q^2(x^2 + y^2)$.
 (q) $pqu = p^2(xq + p^2) + q^2(yq + q^2)$.

4.20 Za naslednje Pfaffove enačbe preveri, ali imajo dvorazsežno rešitev in tiste enačbe, ki dvorazsežno rešitev res imajo, reši.

- (a) $y dx + x dy + 2z dz = 0$.
 (b) $z(z + y) dx + z(z + x) dy - 2xy dz = 0$.
 (c) $yz dx + 2xz dy - 3xy dz = 0$.
 (d) $(y^2 + xz) dx + (x^2 + yz) dy + 3z^2 dz = 0$.
 (e) $2y(a - x) dx + [z - y^2 + (a - x)^2] dy - y dz = 0$.
 (f) $y(1 + z^2) dx - x(1 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 0$.
 (g) $(y^2 + yz + z^2) dx + (z^2 + zx + x^2) dy + (x^2 + xy + y^2) dz = 0$.
 (h) $yz dx + xz dy + xy dz = 0$.
 (i) $(1 + yz) dx + x(z - x) dy - (1 + xy) dz = 0$.
 (j) $y(x + 4)(y + z) dx - x(y + 3z) dy + 2xy dz = 0$.
 (k) $yz dx + (x^2y - zx) dy + (x^2z - xy) dz = 0$.
 (l) $2yz dx - 2xz dy - (x^2 - y^2)(z - 1) dz = 0$.

4.21 (Pisni izpit Analiza IV, julij 1997) Poišči tisto rešitev enačbe

$$(x - y)y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (y - x)x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + y^2) u,$$

ki poteka skozi krivuljo $xu = a^3$, $y = 0$.

4.22 (Pisni izpit Analiza IV, september 1997) Dokaži, da je

$$u^2 = a^2x^2 + (ay + b)^2$$

popolni integral enačbe

$$(p^2 + q^2)x = pu$$

in poišči tisto rešitev enačbe, ki poteka skozi krivuljo $x = 0$, $u^2 = 4y$.