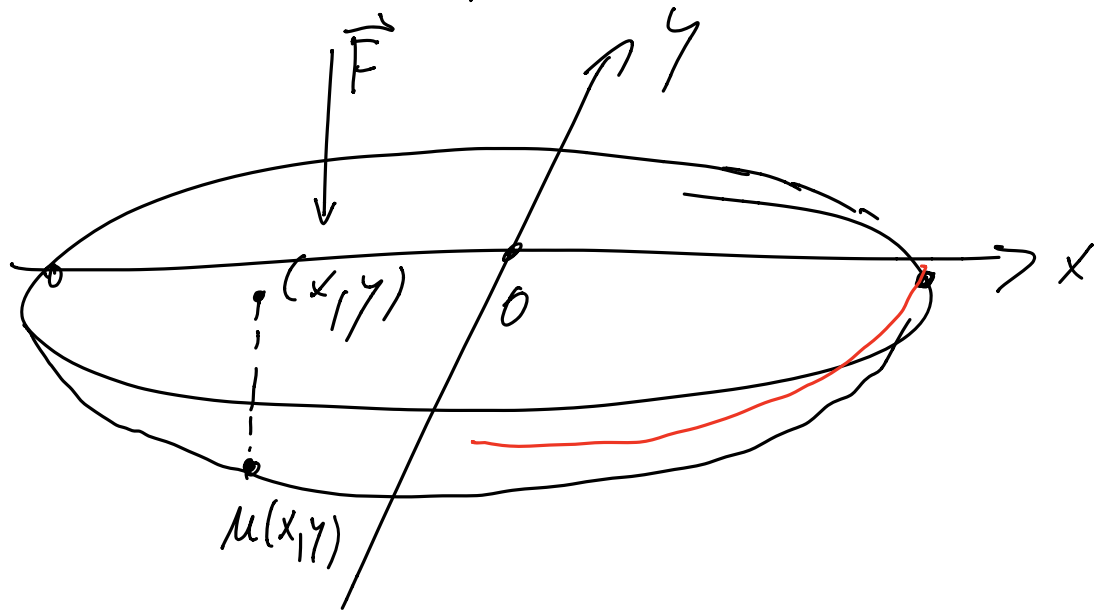


Upogib tanke opne nad krožno zanko



- predpostavimo, da je opna v oblihi kroga z radijem $R > 0$
 - leži v xy ravnini
 - opna je centrirana v točko $O(0, 0)$
 - iščemo funkcijo $u: D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$,
kjer je $D = \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$,
 $\partial D = \{(x, y); x^2 + y^2 = R^2\}$, da je
 $u(x, y)$ upogib opne nad točko (x, y)
- Da se izprejati, da mora u zadoščati:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) ; (x, y) \in D,$$

$$u(x, y) = 0 ; (x, y) \in \partial D.$$

Pri tem jē $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

• Klāstīma vešiter problema: dāhrat zv. o dvedljinu funkciju u , hi j zvezna do roba ter zadošca 'dif. knači in robrim pogojem.

• Kākīma j vešiter, cē j $f \equiv 0$?

Smiselnē j nvesti polārme koordināte:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

$$(r, \phi) \in [0, R] \times [0, 2\pi).$$

Laplaceor operator se r polārmih koordinātah izvāža hōt

$$\Delta u(r, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2},$$

$$v(r, \phi) = u(x, y).$$

Če je opreca homogena, ji zelo naravno predpostaviti da je celoten problem krožno simetričen.

V tem primeru sta v in f neodvisni od ϕ :

$$v(r, \phi) =: v(r),$$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: f(r).$$

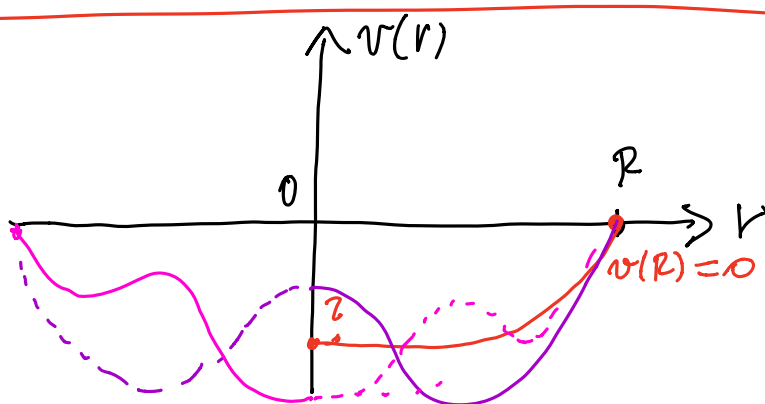
Pridemo do problema

$$\frac{1}{r} (r v'(r))' = f(r)$$

$$\frac{1}{r} (v'(r) + r v''(r)) = f(r)$$

$$v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = f(r); \quad r \in [0, R]$$

$$v(R) = 0.$$



Vemo ("fizikalni slop") : $\underline{\underline{v'(0) = 0}}$

Primer :

$$v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = 1, \quad r \in [0, 1]; \quad v(1) = 0 \\ v'(0) = 0$$

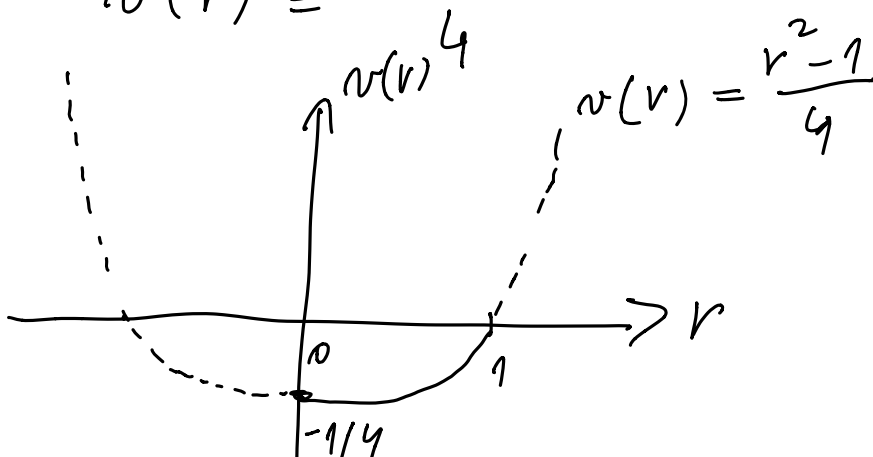
Enačbo lahko prevedemo na Eulerjevo enačbo drugega reda.

Splošna rešitev je

$$v(r) = \frac{r^2}{4} + A \log r + B$$

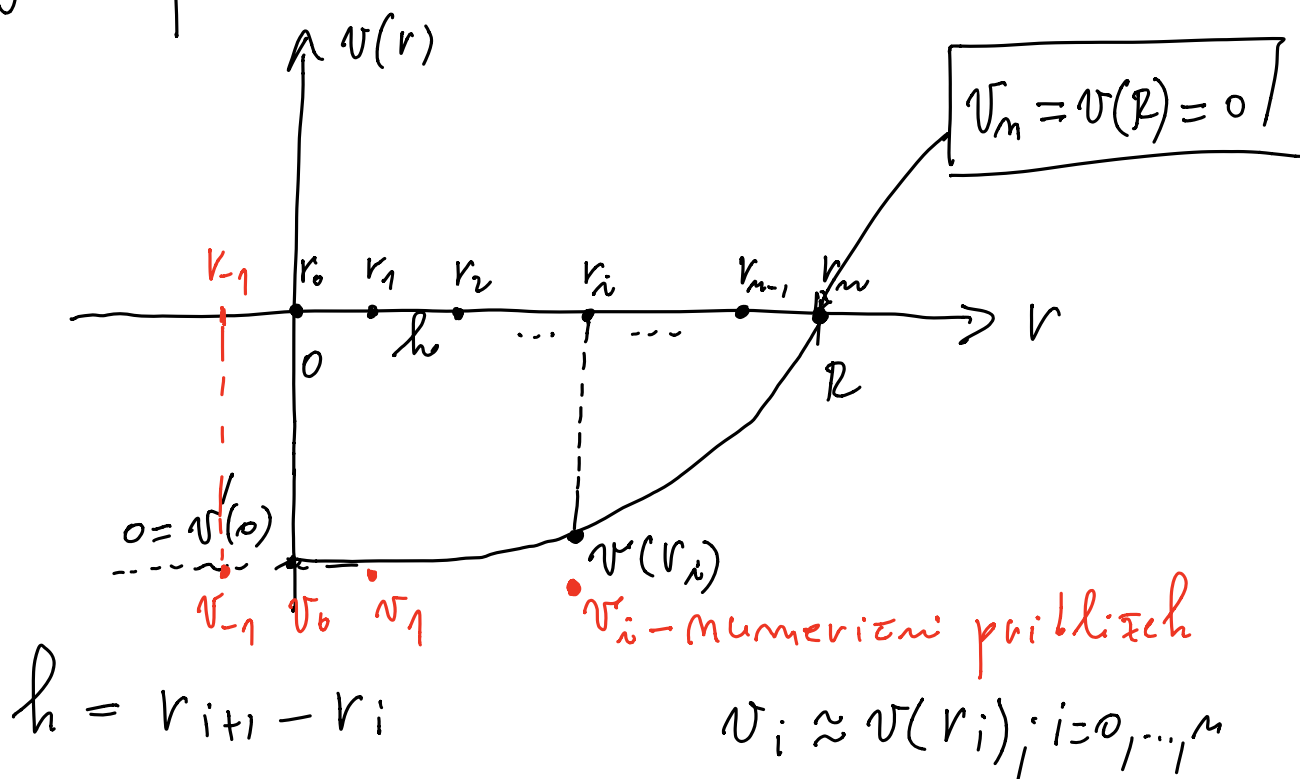
Iz robnih pogojev dobimo, da je

$$v(r) = \frac{r^2 - 1}{4}$$



Numerično reševanje - metoda homogenih diferenc

- Interval $[0, R]$ razdelimo na n enako
dolgih podintervalov:



Dif. enačbo 2. reda:

$$v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = f(r)$$

homo (približno) rešili samo v točkah

$$r_i, i=0, 1, \dots, n-1.$$

Želimo poiskati $v(r_i)$ tako, da bo

$$v''(r_i) + \frac{1}{r_i} v'(r_i) = f(r_i) = f_i, i=0, 1, \dots, n-1$$

Zato izpefferemo aproksimacije za $v''(r_i)$ in $v'(r_i)$ ($v(r_i)$ pa bomo malo kasneje neposredno z v_i).

Kako aproksimirati $v'(r_i)$ in $v''(r_i)$?

① Taylor:
$$\begin{aligned} v(r_{i+1}) &\approx v_i + h v'(r_i) + \frac{h^2}{2} v''(r_i) \\ v(r_{i-1}) &\approx v_{i-1} - h v'(r_i) + \frac{h^2}{2} v''(r_i) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{i+1} - v_{i-1} = 2h v'(r_i) + O(h^3)$$

$$v'(r_i) = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

② Alternativa (bi da isti rezultat):
 istoeno formulo za $v'(r_i)$ na točkah
 $(r_{i-1}, v(r_{i-1}))$, $(r_i, v(r_i))$ in $(r_{i+1}, v(r_{i+1}))$,
 pri čemer $v(r_i)$ zamenjamo z v_i .

⋮

Podobno naredimo še za $v''(r_i)$:

$$v''(r_i) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Izpejane vrednosti vstavimo v dif. enačbo in dobimo sistem lin. enačb:

Iz skice opazimo, da je $\overline{v_{-1} = v_1}$ in to upoštevamo v prvi enačbi. V ostalih enačbah pa pač zapišemo izpejane izraze.

Dobimo sistem

$$Av = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Matrica A je tridiagonalna.

Lema: Če je matrica strogo diag.

dominantna po vrsticah (ali je silno diag. dominantna, irreducibilna

in n af n eni a_{ii} strogo diag.
dom. $)$, je obrnljiva.

Kaf je stroga diag. dominantna:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1, 2, \dots, n.$$