SPOMNIMO:

L'HOSPITALOVO PRAVILO:

NAJ BOSTA $f$ IN $g$ ODVEDLJIVI V OKOLICI TOČKE $x_0$ (RAZEN MORDA V $x_0$) IN NAJ GRESTA HKRATI PROTI $0$ ALI $\pm\infty$, KO GRE $x \to x_0$.
ČE OBSTAJA LIMITA $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, OBSTAJA TUDI LIMITA $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ IN STA ENAKI.

OPOMBA: VELJA TUDI ZA $x \searrow x_0$ IN $x \nearrow x_0$ TER $x_0 = \pm\infty$.

NALOGA: IZRAČUNAJ NASLEDNJE LIMITE.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$.

REŠITEV:

TIP $\frac{\infty}{\infty}$

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$

$(-\infty)\cdot 0$ $\quad$ $0/0$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{x^{-3}} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^{2x}}{-3x^{-4}}$

TA PRISTOP NI DOBER, KER SE POTENCA PRI $x$ POVEČUJE NAMESTO, DA BI SE MANJŠALA.

$\frac{-\infty}{\infty}$ $\quad$ $\frac{-\infty}{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^{-2x}} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-2e^{-2x}} \overset{\text{L.P.}}{=}$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{6x}{4e^{-2x}} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{6}{-8e^{-2x}} = -\frac{6}{8\cdot\infty} = 0$$

$\frac{-\infty}{\infty}$

(c) $$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln x}$$

PODOBNO KOT $x^x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{L.P}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$\frac{\infty}{\infty}$

$\infty\cdot 0$ $\qquad \frac{0}{0}$

(d) $$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}}{1/x} \overset{\text{L.P.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x+1}\right)^2}\cdot \frac{-2}{(2x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 \;/:x^2}{(2x+1)^2+1 \;/:x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(2+\cancel{\frac{1}{x}}^{\to 0})^2 + \cancel{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(e) DENIMO, DA ZA TO LIMITO UPORABIMO PRAVILO BREZ PREDHODNEGA RAZMISLEKA:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x}{3x+\cos x} \overset{\text{L.P}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x}{3-\sin x}$$

$\frac{\infty}{\infty}$

LIMITA NA DESNI NE OBSTAJA, SAJ $\cos x$ IN $\sin x$ OSCILIRATA, KO GRE $x\to\infty$. ZATO TO PRAVILO NI UPORABNO V TEM PRIMERU. PRAVI NAČIN:

0 (KER $\sin x$ IN $\cos x$ OMEJENI)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x \;/:x}{3x+\cos x \;/:x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{\sin x}{x}}{3+\frac{\cos x}{x}} = \frac{2}{3}.$$

$\frac{\cos x}{x} \to 0$

# RISANJE GRAFOV FUNKCIJ

ODVOD NAM JE V VELIKO POMOČ, KADAR ŽELIMO SKICIRATI GRAF FUNKCIJE, KI JE RAZMEROMA ODVEDLJIVA. TEDAJ SI POMAGAMO Z NASLEDNJIMI PODATKI:

(1) IZRAČUNAMO $D_f$ IN $Z_f$, TER TUDI LIMITE $f(x)$, KO SE $x$ PRIBLIŽUJE ROBOVOM $D_f$. ZA TO POGOSTO UPORABIMO L'HOSPITALOVO PRAVILO.

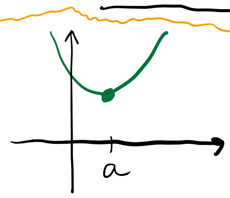
(2) IZRAČUNAMO NIČLE IN ZAČETNO VREDNOST $f(0)$.

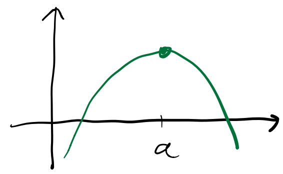
(3) IZRAČUNAMO STACIONARNE TOČKE $f'(a)=0$ IN DOLOČIMO INTERVALE NARAŠČANJA (KJER $f'(x)>0$) TER INTERVALE PADANJA (KJER $f'(x)<0$).

(4) KARAKTER STACIONARNIH TOČK LAHKO OBRAVNAVAMO TUDI Z DRUGIM ODVODOM. NAJ BO $f'(a)=0$.

(i) ČE $f''(a)>0$, JE $x=a$ <u>LOK. MINIMUM</u>.

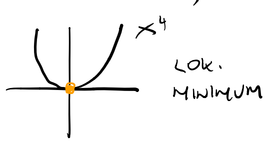
(ii) ČE $f''(a)<0$, JE $x=a$ <u>LOK. MAKSIMUM</u>.

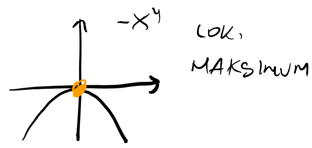


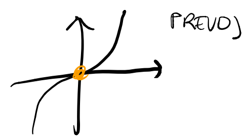




(iii) KADAR JE $f''(a)=0$, SE LAHKO ZGODITA OBE ZGORNJI OPCIJI, MOŽNO PA JE TUDI, DA IMAMO V $x=a$ <u>PREVOJ</u> t.j. TOČKO, KJER SE $f$ 'USTAVI', A NE PREIDE IZ NARAŠČANJA V PADANJE OZ. OBRATNO.

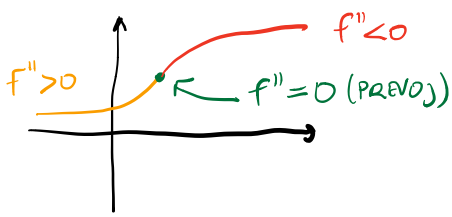
NPR. $f'(0)=f''(0)=0$ ZA VSE $f(x)=\pm x^n$, $n\geq 3$.




(5) DRUGI ODVOD POVE TUDI, KJE JE $f$ KONVEKSNA ($f''>0$) OZ. KONKAVNA ($f''<0$).




OPOMBA: PREVOJ NI NUJNO TUDI STAC. TOČKA!

(6) KADAR OBSTAJAJO, DOLOČAMO TUDI ASIMPTOTE LINEARNIH, KVADRATIČNIH ALI DRUGIH TIPOV ZA $f$ IN $x$ NA ROBU $D_f$.

VODILO ZA REŠEVANJE:

VEDNO IZRAČUNAJ VSAJ VSE TISTO, KAR ZAHTEVA BESEDILO NALOGE.

NALOGA: DOLOČI NIČLE, STACIONARNE TOČKE IN PREVOJE ZA

$f(x) = \sin x + \sin^2 x$ NA $[0, 2\pi]$, TER SKICIRAJ GRAF.

NIČLE: $\sin x + \sin^2 x = \sin x\,(1 + \sin x) = 0$

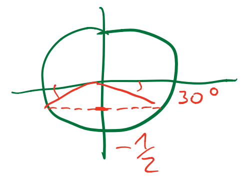
$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

STAC. TOČKE:

$f'(x) = \cos x + 2\sin x \cos x = \cos x\,(1 + 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2}$




$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{11\pi}{6}$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2,\ f(\frac{3\pi}{2}) = 0,\ f(\frac{7\pi}{6}) = f(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

PREVOJI: $f''(x) = -\sin x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x =$

$= -\sin x + 2(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x =$

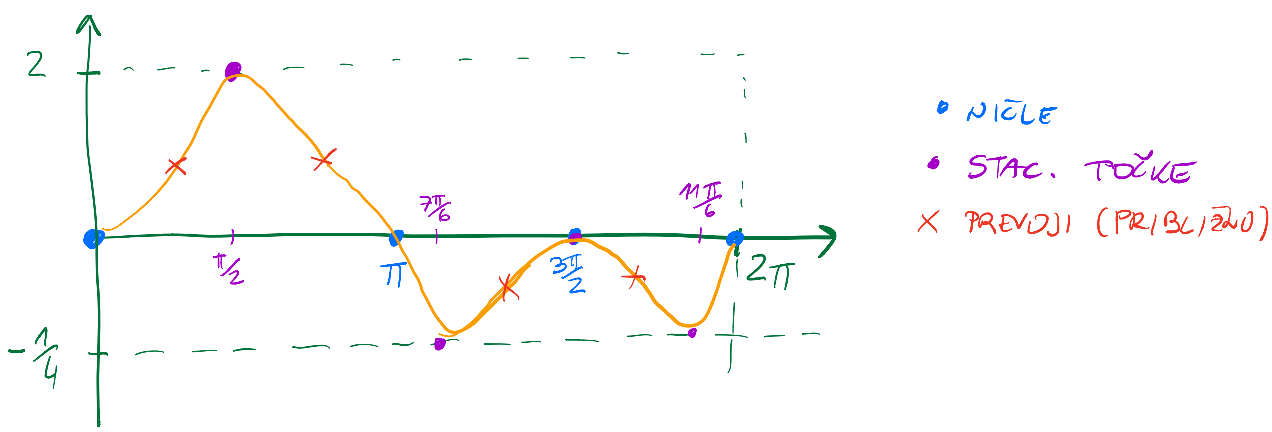
$= 2 - \sin x - 4\sin^2 x = 0, \quad t = \sin x$

$4t^2 + t - 2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 32}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$\sin x = t_1$ IMA DVE REŠITVI NA $[0, \frac{\pi}{2}]$ IN $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

$\sin x = t_2$ IMA DVE REŠITVI NA $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.



NALOGA: ZA FUNKCIJO $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ DOLOČI NIČLE, Df IN LIMITE NJEGOVIH ROBOVIH. POIŠČI STACIONARNE TOČKE IN PREVOJE, TER DOLOČI INTERVALE NARAŠČANJA/PADANJA/KONVEKSNOSTI/KONKAVNOSTI. NATO SKICIRAJ NJEN GRAF.

REŠITEV: NIČLA: $1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow \boxed{x=e}$

Df: $x>0$ ZARADI LOGARITMA

$1+\ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{e}$ POL

$Df=(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},\infty)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln x}{1+\ln x} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{L.P.}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-1/x}{1/x}=-1$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1-\ln x}{1+\ln x} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{L.P.}{=}} \lim_{x\to \infty}\frac{-1/x}{1/x}=-1$$

$$\lim_{x\nearrow \frac{1}{e}}\frac{1-\ln x}{1+\ln x}=\frac{2}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\searrow \frac{1}{e}}\frac{1-\ln x}{1+\ln x}=\frac{2}{0^+}=\infty$$

STACIONARNE TOČKE:

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2}=-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}<0$$

ZA $x\in Df$.

STACIONARNIH TOČK NI, FUNKCIJA PADA NA CELEM Df.

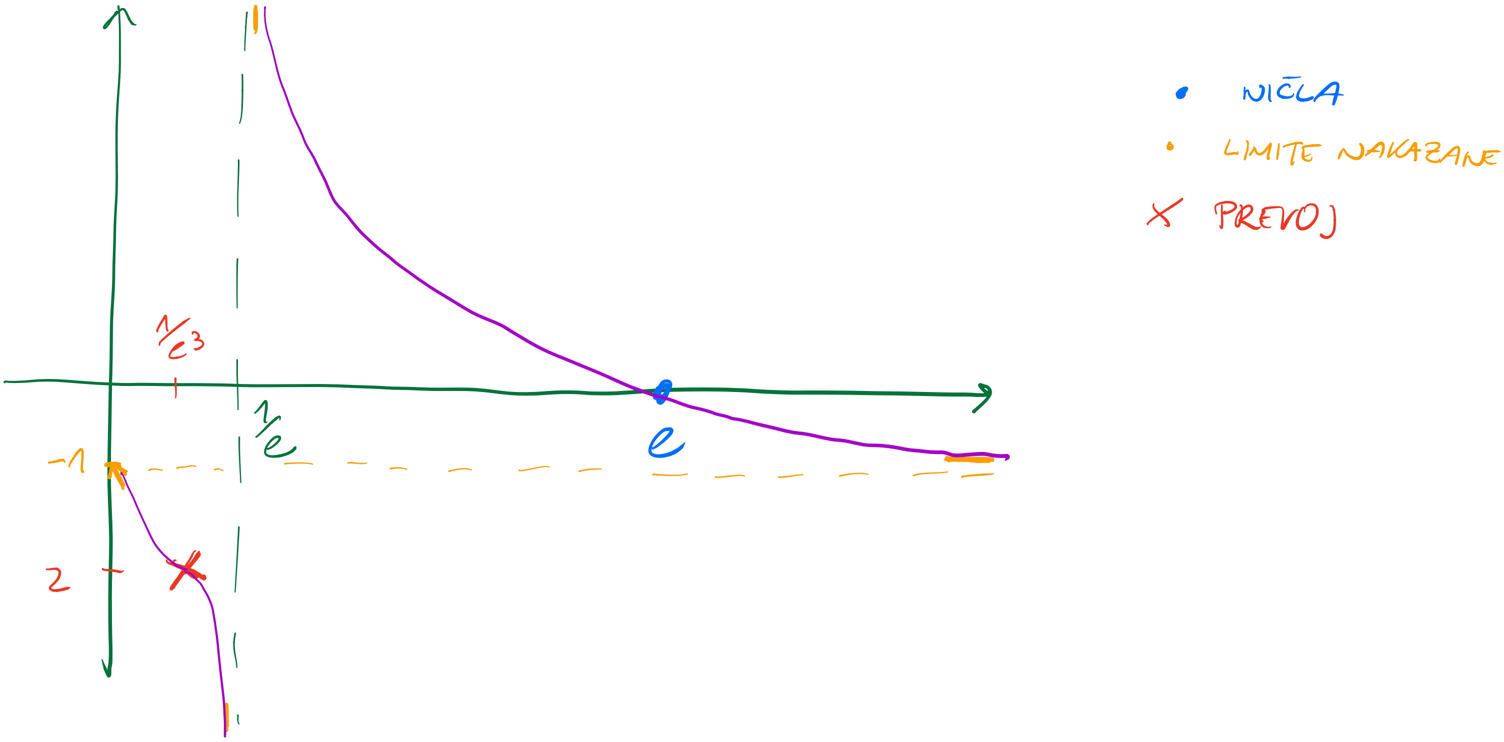
PREVOJI:

$$f''(x)=\frac{2}{x^2(1+\ln x)^4}\cdot\left((1+\ln x)^2+2x(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{2\cdot(3+\ln x)}{x^2(1+\ln x)^3}=0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=e^{-3} \\ f(e^{-3})=\frac{1+3}{1-3}=-2 \end{array}}$$

FUNKCIJA JE KONKAVNA NA $(e^{-3},e^{-1})$, SICER PA JE KONVEKSNA.

$+$ $\quad 1/e^3 \quad$ $-$ $\quad 1/e \quad$ $+$




NALOGA: ZA FUNKCIJO $f(x) = (2x^2-17)\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ DOLOČI NIČLE, $D_f$, LIMITE V NJEGOVIH ROBOVIH TER INTERVALE NARAŠČANJA IN PADANJA. BODI POZOREN TUDI NA TOČKE, KJER $f$ NI ODVEDLJIVA.

REŠITEV: NIČLE: $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$, $x = \pm 1$

DEFINICIJSKO OBMOČJE: NIMAMO TEŽAV, ZATO JE $D_f = \mathbb{R}$.

LIMITE V ROBOVIH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (2x^2-17)\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = +\infty$.

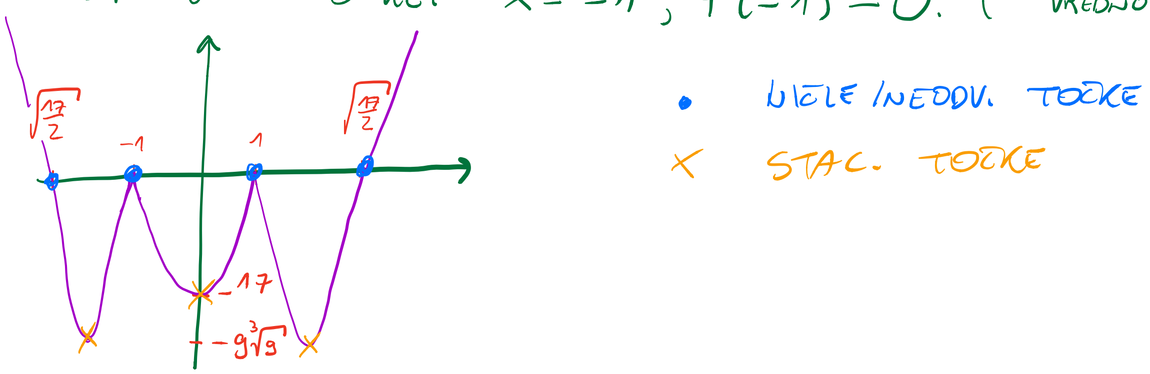
$$f'(x) = 4x^2\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}} + (2x^2-17)\cdot\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x = \frac{20x(x-2)(x+2)}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

STACIONARNE TOČKE: $x=0$, $f(0) = -17$

$x = \pm 2$, $f(\pm 2) = -9\sqrt[3]{9}$

| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $f$ | PAD. | | NAR. | | PAD. | | NAR. | | PADA | | NARAŠČA |

NEODVEDLJIVE TOČKE: $x = \pm 1$, $f(\pm 1) = 0$. (ODVOD SE TAM BLIŽA VREDNOSTI $+\infty$ ALI $-\infty$)



NALOGA: ZA FUNKCIJO $f(x) = \sqrt{x^2+x}$ DOLOČI NIČLE, Df, LIMITE V ROBOVIH, INTERVALE NARAŠČANJA IN PADANJA, TER TUDI LINEARNO ASIMPTOTO, KI OPREDELJUJE VEDENJE ZA $x \to \pm\infty$.

REŠITEV:

NIČLE: $x^2+x = x(x+1) = 0 \Rightarrow x=0, \; x=-1$

Df: $x^2+x = x(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ IN $x \leq -1$

$Df = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

LIMITE V ROBOVIH: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2+x} = \infty, \quad f(0) = f(-1) = 0.$

STAC. TOČKE:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$ NI V DEF. OBMOČJU

OPAZIMO: $f' > 0$ ZA $x \geq 0 \Rightarrow f$ NA $[0, \infty)$ NARAŠČA

$f' < 0$ ZA $x \leq -1 \Rightarrow f$ NA $(-\infty, -1]$ PADA

LINEARNA ASIMPTOTA:

OPAZIMO: $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2(1+\underbrace{\cancel{\tfrac{1}{x}}}_{\to 0})} \approx \sqrt{x^2} = |x|$

ZA $x \to \pm\infty$ ZATO SUMIMO, DA SE $f$ V LIMITI OBNAŠA KOT LINEARNA FUNKCIJA.

ČE JE TO RES ZA $x \to \infty$, MORATA OBSTAJATI $k \in \mathbb{R}$ IN $n \in \mathbb{R}$, DA BO VELJALO:

$$0 = \lim_{x \to \infty} f(x) - kx - n = \lim_{x \to \infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) - n$$

TO INDUCIRA DVA POTREBNA POGOJA:

$$\boxed{k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{IN} \quad \boxed{n = \lim_{x \to \infty} f(x) - kx}$$

SKLEP:

ČE OBE LIMITI V OKVIRČKIH OBSTAJATA, JE $f(x)$ ZA $x \to \infty$ PRIMERLJIVA Z LINEARNO ASIMPTOTO, SICER PA NE t.j. ASIMPTOTO JE TREBA ISKATI V DRUGEM RAZREDU ALI PA NE OBSTAJA.

NAŠ PRIMER:

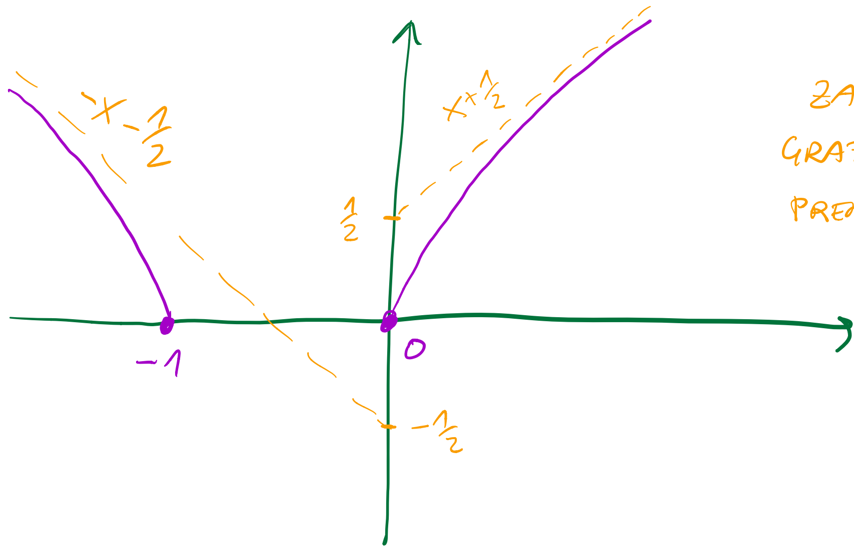
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \begin{matrix} /:x \\ /:x \end{matrix} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \underset{\underset{k}{\parallel}}{\boxed{1}} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} \begin{matrix} /:x \\ /:x \end{matrix} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

NAREDI SAM:

PREMISLI, DA ENAKI SKLEPI VELJAJO TUDI, KO $x \to -\infty$, TER IZRAČUNAJ, DA TAKRAT DOBIŠ $k=-1$ IN $n=-\frac{1}{2}$.




ZA $x \to \pm\infty$ SE GRAF PRIBLIŽUJE K PREMICAMA $y = \pm x \pm \frac{1}{2}$.

NALOGA:

(a) Z ODVODOM POKAŽI, DA ZA VSAK $x \in (-1,\infty) \setminus \{0\}$ VELJA $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$.

(b) SKICIRAJ GRAF FUNKCIJE $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

REŠITEV:

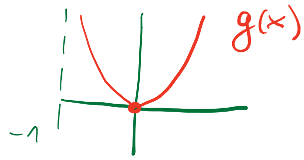
(a) NAJ BO $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. POTEM VELJA:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} = 0$$

FUNKCIJA $g$ IMA V $x=0$ STACIONARNO TOČKO, PRED TEM ZA $x<0$ PADA, NATO PA ZA $x>0$ NARAŠČA. KER JE

$$g(0) = \ln 1 - 0 = 0,$$

TO POTRDI NAŠE ZAHTEVE.




CCA. TAKŠEN JE NJEN GRAF

(b) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

TA FUNKCIJA JE DEFINIRANA LE ZA POZITIVNE OSNOVE T.J. $x > -1$. DODATNA OMEJITEV JE $x \neq 0$ ZARADI $\frac{1}{x}$. TOREJ JE $D_f = (-1,\infty) \setminus \{0\}$.

LIMITE V ROBOVIH:

$$\lim_{x\downarrow -1} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow -1} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\downarrow -1}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\infty} = \infty$$

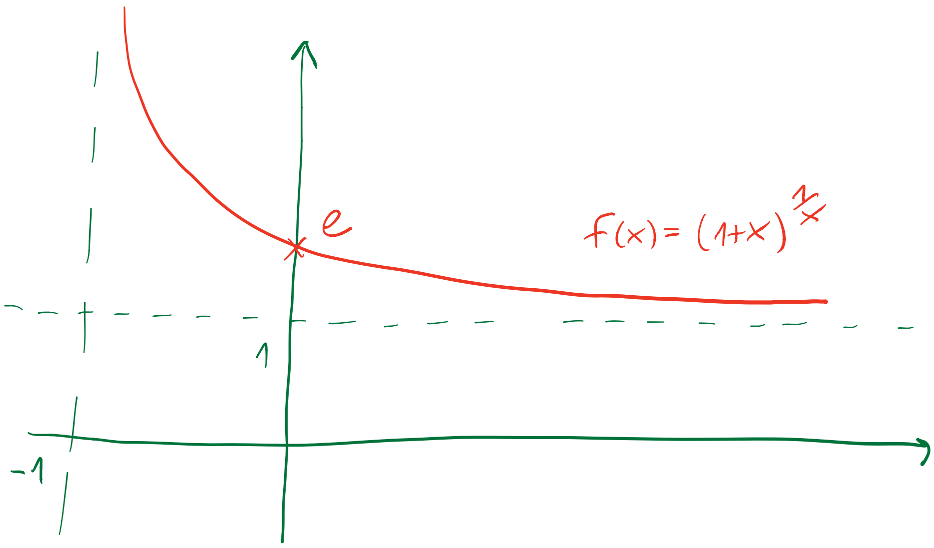
$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$ (VELJA V OBEH PRIMERIH $x \searrow 0$ IN $x \nearrow 0$)

$$\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}} \overset{\text{L.P.}}{=} e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = e^0 = 1$$

ODVOD FUNKCIJE:

$$f'(x) = \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$\overset{(a)}{=} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{(-g(x))}{x^2} < 0 \quad \text{ZA } x \in D_f.$$



e
$f(x) = (1+x)^{1/x}$
1
-1