· Ponovimo:

Matrika A je podobna matriki B, če obstaja taka obrnljiva matrika P, da velja $B = PAP^{-1}$

Podprostor W v F^n je invarianten za matriko $A \in M_n(F)$ če velja $Aw \in W$ za vsak $w \in W$ ($\Leftrightarrow$ če je $A \cdot W \subseteq W$)

Opomba: Matrika $A \in M_n(F)$ je obrnljiva natanko tedaj, ko je $\ker A = \{0\}$

(To sledi iz karakterizacije obrnljivih matrik, ampak dokažimo še direktno.

množenje z A

$?\Updownarrow$ A je obrnljiva $\Leftrightarrow$ L_A je bijektivna

$\ker A = \{0\}$ $\Updownarrow$

$\Updownarrow$

$\ker L_A = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ L_A je injektivna

$\operatorname{Im} L_A = F^n$ $\Leftrightarrow$ in L_A je surjektivna

Zakaj sta ~~ti~~ dve lastnosti ekvivalentni $\ker L_A = \{0\}$?

- Osnovna formula pravi

$$\dim \operatorname{Ker} L_A + \dim \operatorname{Im} L_A = \underset{\substack{\| \\ n}}{\dim F^n}$$

- $\operatorname{Ker} L_A = \{0\} \iff \dim \operatorname{Ker} L_A = 0$

$\overset{\text{osnovna}}{\iff} \dim \operatorname{Im} L_A = n \iff \operatorname{Im} L_A = F^n$

Izračunaj lastne podprostore za

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A_1 - 2I) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}^3$$

$$= \operatorname{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A_1 - 2I) = 3$$

$\Rightarrow$ geometrijska večkratnost lastne vredn. 2 je $\underline{\underline{3}}$

Izračunaj lastne podprostore za

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A_2 - 2I) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \,\middle|\, b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, a, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \operatorname{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A_2 - 2I) = 2$

$\Rightarrow$ geom. večkratnost last. vred. 2 je $\underline{\underline{2}}$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A_3 - 2I) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \;\middle|\; b = 0,\ c = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \operatorname{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A_3 - 2I) = 1$

$\Rightarrow$ geometrijska večkratnost lastne vrednosti 2 je enaka 1.

Če je v lastni vektor za A za lastno vrednost λ, potem je Pv lastni vektor za PAP^{-1} za lastno vrednost λ

$$(PAP^{-1})(Pv) = PA\underbrace{P^{-1}P}_{I}v = PAIv =$$

$$= PAv \overset{Av=\lambda v}{=} P(\lambda v) = \lambda Pv$$

Torej je res Pv lastni vektor za PAP^{-1}, ki pripada lastni vrednosti λ.