

Deformacijski retrakti

Definicija 3.1 Naj bo $A \subset X$. Preslikavo $r: X \rightarrow A$ za katero velja $r|_A = id_A$ imenujemo **retrakcija** podprostor A pa **retrakt** prostora X .

Podprostor $A \subset X$ je **deformacijski retrakt**, če obstaja homotopija $H: X \times \mathbb{I} \rightarrow X$ med id_X in kakšno retrakcijo $r: X \rightarrow A$. Homotopijo H imenujemo **deformacijska retrakcija**. Če homotopija H miruje na množici A jo imenujemo **kreпка deformacijska retrakcija** prostor A pa **kreпки deformacijski retrakt** prostora X .

Naloga 3.2 1. Poišči vse retrakte krožnice $\mathbb{S}^1$.

2. Poišči vse deformacijske retrakte krožnice $\mathbb{S}^1$.

3. Poišči vse krepke deformacijske retrarkcije krožnice $\mathbb{S}^1$.

Naloga 3.3 Pokaži, da sta poljubni deformacijski retrakciji $F, G: X \times \mathbb{I} \rightarrow X$ prostora X na podprostor A homotopni.

Naloga 3.4 Naj bo $x_0 \in X$ krepki deformacijski retrakt prostora X .

1. Pokaži, da za vsako okolico U točke x_0 obstaja okolica $V \subset U$ točke x_0 , da je vložitev $i: V \hookrightarrow U$ homotopna konstantni.

2. Pokaži, da je prostor X lokalno povezan s potmi v točki x_0 .

Naloga 3.5 Naj bo $X = (\mathbb{I} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{I}) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times \mathbb{I})$.

1. Pokaži, da je vsaka točka deformacijski retrakt glavnika X .

2. Poišči vse točke, ki so krepki deformacijski retrakti glavnika X .

Naloga 3.6 Naj bo $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \{(x + a, \frac{x}{n}) \mid x \in [0, \frac{1}{2}], a \in \{0, \frac{1}{2}\}, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Pokaži, da je X kontraktibilen. (Torej je vsaka točka deformacijski retrakt prostora X .)

2. Poišči vse točke, ki so krepki deformacijski retrakti prostora X .

Naloga 3.7 Naj bo

$$X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(x + a, \frac{x}{n} \right) \mid m \in \mathbb{N}, x \in \left[0, \frac{1}{2^m} \right], a = \frac{2^{m-1} - 1}{2^{m-1}}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pokaži, da je prostor X kontraktibilen.

Naloga 3.8 Naj bo

$$T = (\mathbb{I} \times \{0\}) \cup (\cup_{q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{I}} \{q\} \times [0, q])$$

in naj bo $\hat{T}$ množica T , ki jo zrcalimo preko simetrane lihih kvadrantov in tansliramo za ena navzdol. Naj bo $X_0 = T \cup \hat{T}$ in za vsak $n \in \mathbb{Z}$ naj bo X_n množica X_0 translirana za vektor (n, n) . Naj bo $X = \cup_{n \in \mathbb{Z}} X_n$.

1. Pokaži, da so vse točke deformacijski retratki prostora X .

2. Pokaži, da nobena točka ni krepki deformacijski retratki prostora X .