

Direktna limita

Definicija 6.1 Naj bodo G_n grupe in $f_{n,m}: G_n \rightarrow G_m$ taki homomorfizmi, da je $f_{n,m} \circ f_{k,n} = f_{k,m}$. **Direktna limita** je grupa $G = \varinjlim (G_n, f_{n,n+1})$ skupaj s homomorfizmi $f_n: G_n \rightarrow G$, da je $f_n \circ f_{m,n} = f_m$, z naslednjo lastnostjo: Če je H poljubna grupa in $g_n: G_n \rightarrow H$ tak nabor homomorfizmov, da je $g_n \circ f_{m,n} = g_m$, potem obstaja natanko en homomorfizem $f: G \rightarrow H$, da je $f \circ f_n = g_n$.

Naloga 6.2 Naj bo $G_n = \mathbb{Z}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in naj bodo homomorfizmi $\varphi_{n,n+1}, \psi_{n,n+1}, \rho_{n,n+1}: G_n \rightarrow G_{n+1}$ definirani s predpisom $\varphi_{n,n+1}(x) = 0$, $\psi_{n,n+1}(x) = 2x$ ter $\rho_{n,n+1}(x) = (n+1)x$. Določi direktne limite $\varinjlim (G_n, \varphi_{n,n+1})$, $\varinjlim (G_n, \psi_{n,n+1})$ in $\varinjlim (G_n, \rho_{n,n+1})$.

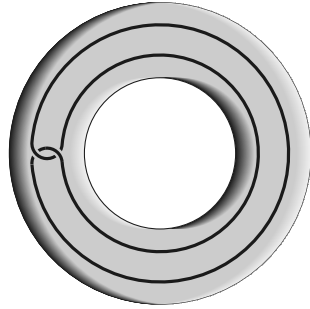
Naloga 6.3 Naj bo $x_0 \in X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$ zaporedje vloženih podprostorov in naj bo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Za $n < m$ označimo inkluziji $i^{n,m}: X_n \hookrightarrow X_m$ in $i^n: X_n \hookrightarrow X$. Če za vsako kompaktno množico $K \subset X$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $K \subset X_n$, potem je $\pi_1(X)$ skupaj s homomorfizmi $i_{\#}^n: \pi_1(X_n) \rightarrow \pi_1(X)$ direktna limita.

Naloga 6.4 Naj bo $T_0 \subset \mathbb{R}^3$ poln torus in $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tak homeomorfizem, da je $f(T_0) \subset \text{Int } T_0$ kot kaže spodnja slika.



Naj bo $T_{n+1} = f(T_n)$ in naj bo $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$. Prostor T imenujemo **diadični solenoid**. Izračunaj $\pi_1(\mathbb{R}^3 - T)$.

Naloga 6.5 Naj bo $T_0 \subset \mathbb{R}^3$ poln torus in $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tak homeomorfizem, da je $f(T_0) \subset \text{Int } T_0$ Whiteheadov splet kot kaže spodnja slika.



Naj bo $T_{n+1} = f(T_n)$. Presek $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ se imenuje **Whiteheadov kontinuum**. Izračunaj $\pi_1(\mathbb{R}^3 - T)$.