

Krovi

Naloga 7.1 Naj $\mathbb{S}_a(r) \subset \mathbb{R}^2$ označuje krožnico $\{(x, y) \mid d((x, y), a) = r\}$. Naj bo

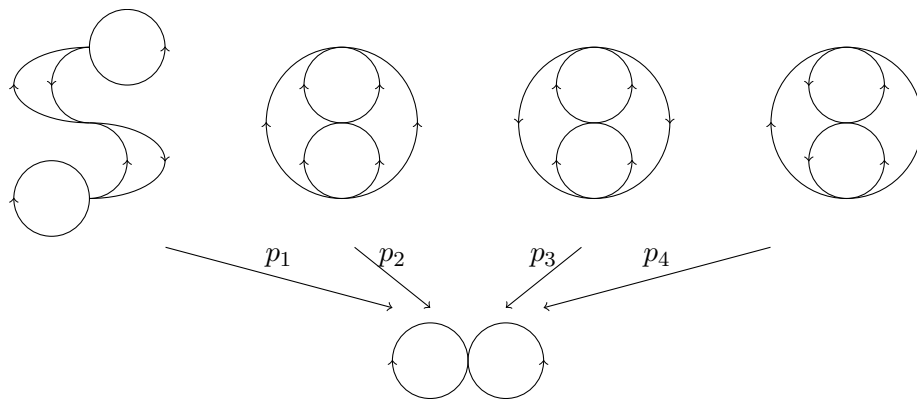
$$\begin{aligned} X &= \mathbb{S}_{(-2,0)}(1) \cup \mathbb{S}_{(0,0)}(1), \\ Y &= \mathbb{S}_{(-2,0)}(1) \cup \mathbb{S}_{(0,0)}(1) \cup \mathbb{S}_{(2,0)}(1). \end{aligned}$$

Ali je katera od preslikav $p_i: Y \rightarrow X$, ki je podana s predpisom

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= \begin{cases} (-|x|, y), & |x| \geq 1, \\ (\cos(\pi x), \sin(\pi x)), & |x| \leq 1, \end{cases} \\ p_2(x, y) &= \begin{cases} (-|x|, y), & |x| \geq 1, \\ (\cos(\pi x), \sin(\pi x)), & |x| \leq 1, y \geq 0, \\ (\cos(\pi x), -\sin(\pi x)), & |x| \leq 1, y \leq 0, \end{cases} \\ p_3(x, y) &= \begin{cases} (-|x|, y), & |x| \geq 1, \\ (\cos(\pi x), -\sin(\pi x)), & |x| \leq 1, y \geq 0, \\ (\cos(\pi x), \sin(\pi x)), & |x| \leq 1, y \leq 0, \end{cases} \\ p_4(x, y) &= \begin{cases} (|x| - 2, y), & |x| \geq 1, \\ (-\cos(\pi x) - 2, \sin(\pi x)), & |x| \leq 1, y \geq 0, \\ (-\cos(\pi x) - 2, -\sin(\pi x)), & |x| \leq 1, y \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

krovnna projekcija? Kateri krovi so med seboj izomorfni?

Naloga 7.2 Naj bo $X = \mathbb{S}_{(-1,0)}(1) \cup \mathbb{S}_{(1,0)}(1)$ in $p_i: Y_i \rightarrow X$ kot kažejo spodnje slike.



Ali je katera od preslikav p_i krovnna projekcija? Kateri krovi so med seboj izomorfni?

Naloga 7.3 Naj bosta $f, g: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$ definirani s predpisom $f(z) = (\frac{z}{|z|}, e^{i|z|})$ in $g(z) = (\frac{z}{|z|}, e^{i \ln |z|})$. Ali je katera od preslikav f in g krovnna projekcija?

Naloga 7.4 Naj grupa $G = \mathbb{Z}$ deluje na $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ s predpisom $n(x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Pokaži, da je kvocientna projekcija $q: X \rightarrow X/G$ krovnna projekcija. Pokaži, da X/G ni Hausdorffov prostor.

Naloga 7.5 Naj bo $p: \tilde{X} \rightarrow X$ krovnna projekcija in X Hausdorffov prostor. Pokaži, da je tudi $\tilde{X}$ Hausdorffov prostor.

Naloga 7.6 Naj bo $f: \tilde{X} \rightarrow X$ krovna projekcija.

1. Če je $\tilde{X}$ 2-števen, je X 2-števen.

2. Če je $\tilde{X}$ povezan in X 2-števen, je $\tilde{X}$ 2-števen.

Naloga 7.7 Naj bodo X, Y in Z lokalno s potmi povezani prostori. Naj bodo $p: X \rightarrow Y$, $q: Y \rightarrow Z$ in $r = q \circ p: X \rightarrow Z$ preslikave.

1. Če sta p in r krovni projekciji, je tudi q krovna projekcija.

2. Če sta q in r krovni projekciji ter je Y povezan prostor, je tudi p krovna projekcija.

3. Če sta p in q krovni projekciji in je q končno listna, je tudi r krovna projekcija. (Predpostavka o končnolistnosti projekcije q je potrebna, kot kaže naloga 8.8.)

Naloga 7.8 Za vsak $m, n \in \mathbb{Z}$ definiramo $K_n^m = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (\frac{n}{|n|+1} + 3mi)| = \frac{1}{|n|+1}\}$. Naj bo

$$\begin{aligned} Z &= \cup_{n \geq 0} K_n^0 \quad (\text{Havajski uhan}), \\ Y &= (\cup_{m \in \mathbb{Z}} \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n^m) \cup (\{1\} \times i\mathbb{R}), \\ X &= (\cup_{m \in \mathbb{Z}} \cup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \neq 1}} K_n^m) \cup (\{-1, 1\} \times i\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Naj bo $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definirana s predpisom $\psi(x + iy) = |x| + iy$. Definirajmo preslikavi $q: Y \rightarrow Z$ in $p: X \rightarrow Y$ s predpisoma

$$q(z) = \begin{cases} z - 3mi & , z \in K_n^m, \\ e^{\frac{2}{3}\pi(z-1)} & , z \in \{1\} \times i\mathbb{R}, \end{cases}$$

in

$$p(z) = \begin{cases} \psi(z), & z \in \{-1, 1\} \times i\mathbb{R}, \\ \psi(z), & z \in K_n^m, |n| > |m+2| \\ \frac{|n|+1}{|n|}(\psi(z) - \frac{|n|}{|n|+1}) + \frac{|n|-1}{|n|}, & z \in K_n^m, 2 \leq |n| \leq |m+2|, \\ \frac{1}{|m|+1}((z - 3mi)^2 + 1) + 3mi, & z \in K_0^m. \end{cases}$$

Pokaži, da sta p in q krovni projekciji, kompozitum $q \circ p$ pa ne.