

Homotopska ekvivalenca

Definicija 2.1 Prostora X in Y sta **homotopsko ekvivalentna**, če obstajata zvezni preslikavi $f: X \rightarrow Y$ in $g: Y \rightarrow X$, da je $g \circ f \simeq id_X$ in $f \circ g \simeq id_Y$. Preslikavama f in g rečemo **homotopska ekvivalenca**.

Naloga 2.2 Pokaži, da je $f: X \rightarrow Y$ homotopska ekvivalenca natanko tedaj, ko obstajata preslikavi $g, h: Y \rightarrow X$, da je $g \circ f \simeq id_X$ in $f \circ h \simeq id_Y$.

Naloga 2.3 Naj bo X povezan topološki prostor in Y poljuben topološki prostor. Če sta prostora X in Y homotopsko ekvivalentna, je tudi Y povezan.

Naloga 2.4 Kateri od prostorov $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$, $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ in Möbiusov trak so med seboj homotopsko ekvivalentni?

Naloga 2.5 Naj bo $n > m$. Pokaži, da je $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^m \times \{0^{n-m}\}$ homotopsko ekvivalenten $\mathbb{S}^{n-m-1}$.

Naloga 2.6 Naj bo $\mathbf{T}$ torus in $\mathbf{K}$ Kleinova steklenica. Pokaži, da sta prostora $\mathbf{T} - \{*\}$ in $\mathbf{K} - \{*\}$ homotopsko ekvivalentna.

Naloga 2.7 Pokaži, da je $n\mathbf{T} - \{*\}$ homotopsko ekvivalenten $2n\mathbf{P} - \{*\}$.

Naloga 2.8 Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $r \geq 0$. Definirajmo $A_r = \{x \in \mathbb{B}^n \mid \|x\| > r\}$. Za katere r je par $(\mathbb{B}^n, A_r)$ homotopsko ekvivalenten paru $(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$?

Definicija 2.9 Prostor X je **kontraktibilen**, če je id_X homotopna neki konstanti.

Naloga 2.10 Naj bo X topološki prostor in $x_0 \in X$. Pokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne.

1. Prostor X je kontraktibilen.
2. Za vsak topološki prostor Y velja, da sta poljubni preslikavi $f, g: Y \rightarrow X$ homotopni.
3. Za vsak topološki prostor Y in $y_0 \in Y$ velja, da sta poljubni preslikavi $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ prosto homotopni.

Naloga 2.11 Retrakt kontraktibilnega prostora je kontraktibilen prostor.

Naloga 2.12 Naj bo $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} (\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]))$. Za vsak $a \in \mathbb{R}$ naj bo $X_a = X \cup ([a, a+1] \times \{\frac{1}{2}\})$. Poišči potreben in zadastni pogoj, da je X_a kontraktibilen.